José Carlos Santos
Universidade
do Porto
jcsantos@fc.up.pt

QUANDO É DIFÍCIL PROVAR O QUE É ÓBVIO

Qual é a maneira mais eficiente de empilhar esferas do mesmo tamanho? Qualquer merceeiro sabe a resposta, mas provar que é mesmo a melhor solução é complicado.

Sir Walter Raleigh (c.1552-1618) foi das mais notáveis personagens do tempo da rainha Isabel I do Reino Unido. Estadista, soldado, escritor e explorador, foi um dos favoritos da rainha. E tinha ao seu serviço Thomas Harriot (c.1560-1621), que, entre outras coisas, era matemático. Sir Walter Raleigh fez-lhe uma pergunta natural vinda de um soldado daquele tempo e dirigida a um matemático: dada uma pilha de balas de canhão, como calcular quantas balas aí há?[1]

Harriot resolveu o problema, mas ficou a pensar na questão de saber qual é a melhor maneira de empilhar balas de canhão, isto é, a maneira de as empilhar que faz com que haja menos espaço vazio, e como se correspondia com Johannes Kepler (1571–1630), falou-lhe neste problema. Kepler publicou uma brochura sobre o problema, chamada *Strena seu de nive sexangula* (em português: *O floco de neve com seis ângulos*),[2] que é o primeiro texto escrito sobre a análise e a formação de cristais. Aí, ele afirma que a solução para o problema de Harriot é aquela que qualquer merceeiro conhece e que também é a maneira como as balas de canhão estão empilhadas em qualquer museu militar: na base, as balas estão dispostas como na figura 1; cada bala da camada seguinte é colocada num dos espaços mais baixos deixados pela camada anterior, como na figura 2, e assim sucessivamente.

Geralmente, chama-se "conjetura de Kepler" à afirmação segundo a qual a maneira atrás descrita é a mais eficiente de empilhar esferas, mas Kepler não exprimiu esta ideia como uma conjetura. De facto, limitou-se a afirmar que assim é. Por outro lado, ao colocar as esferas desta maneira, aproximadamente 74% do espaço é ocupado por elas; mais precisamente, o valor em questão é igual a $\pi/\sqrt{18} \approx 0{,}74048$.

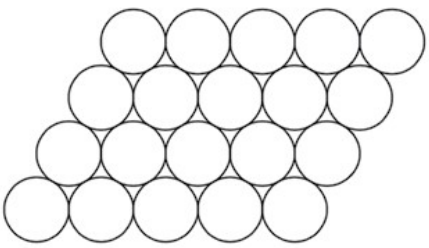

Figura 1. Camada inferior.

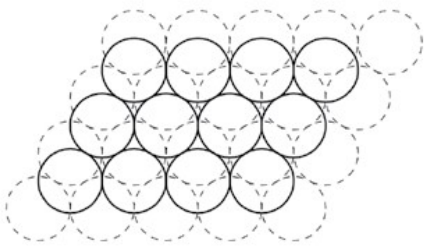

Figura 2. Duas primeiras camadas.

Após o texto de Kepler ter aparecido, decorreram séculos até alguém ter feito qualquer progresso no estudo deste problema. Essa pessoa foi Gauss, que, em 1831, demonstrou a conjetura de Kepler no caso em que os centros das esferas formam um reticulado. Isto significa que os centros das esferas estão regularmente distribuídos. Mais formalmente: se fixarmos o centro C de uma das esferas, então há três vetores linearmente independentes v_1, v_2 e v_3 de $\mathbb{R}^3$ tais que os centros das esferas são os pontos da forma $C + \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3$, onde α, β e γ são números inteiros. Mais à frente, voltaremos a esta demonstração.

Sobra então o caso em que os centros das esferas estão distribuídos de uma maneira irregular. Naturalmente, isto torna o problema mais difícil.

Em 1900, David Hilbert proferiu a sua famosa palestra sobre os problemas que seriam centrais para o desenvolvimento da Matemática nas décadas seguintes (veja-se [1]). O décimo oitavo problema consistia, de facto, em vários problemas relacionados entre si, um dos quais era precisamente o problema de demonstrar a conjetura de Kepler.

Foi somente em 1953 que o matemático húngaro László Fejes Tóth conseguiu fazer progressos quanto à resolução deste problema: conseguiu provar que o problema de determinar qual é a distribuição das esferas com densidade máxima podia ser reduzido a um número finito (mas muito elevado) de cálculos. Isto tornou razoável encarar a possibilidade de o problema poder vir a ser resolvido recorrendo a computadores. Foi precisamente o que acabou por acontecer alguns anos mais tarde com o problema das quatro cores (veja-se [9]).

Em 1993, um matemático californiano, Wu-Yi Hsiang, publicou um artigo ([7]) que pretendia conter uma demonstração da conjetura de Kepler. Essa suposta demonstração levantou muitas dúvidas a diversos matemáticos, entre os quais Gábor Fejes Tóth, filho de László Fejes Tóth, e Thomas C. Hales (veja-se [2]). Este último já tinha sido exposto à conjetura em 1982, mas só começou a dedicar-se seriamente ao problema seis anos mais tarde (veja-se [10, cap. 11]). É geralmente aceite hoje em dia que a demonstração de Hsiang não está completa.

O próprio Thomas C. Hales anunciou em 1998 ter demonstrado a conjetura de Kepler.[3] No entanto, a demonstração só viria a ser publicada em 2005 (veja-se [4]). E não é uma demonstração qualquer, pois não só o artigo em questão é anormalmente longo (tem mais de 100 páginas), como foi acompanhada por três *gigabytes* de programas de computador e de dados. De facto, passaram-se vários anos entre o momento em que o artigo foi submetido à prestigiada revista *Annals of Mathematics* e o momento da publicação, pois foi necessário esse tempo para que uma equipa de revisores científicos lesse e verificasse a validade da demonstração. Um destes revisores, Jeffrey C. Lagarias, afirmou (veja-se [8]):

Figura 3. Thomas C. Hales.

> "A natureza desta demonstração, que consiste em parte num grande número de desigualdades com pouca estrutura interna, bem como o facto de estar estruturada de maneira complexa, faz com seja dificilmente verificada com segurança por seres humanos. No decorrer do processo, a verificação de muitas afirmações específicas permitiu constatar que estavam essencialmente corretas em cada caso. Isto resultou num processo de revisão que criou nos revisores um forte grau de convicção de que esta abordagem à demonstração está essencialmente correta [...]"

Não é habitual encontrar-se a palavra "convicção" na descrição de uma demonstração matemática. Fica claro do texto que os autores da revisão científica anterior ficaram com alguma margem de dúvida (claramente pequena) quanto ao facto de a demonstração estar inteiramente correta.

É claro que Thomas C. Hales poderia ter ficado satisfeito com esta quase certeza. Mas não ficou. Em vez disso,

[1]Kristin Leutwyler, *Stack 'em Tight*, *https://www.scientificamerican.com/article/stack-em-tight/*

[2] O texto original, em latim, pode ser visto em *http://www.thelatinlibrary.com/kepler/strena.html*

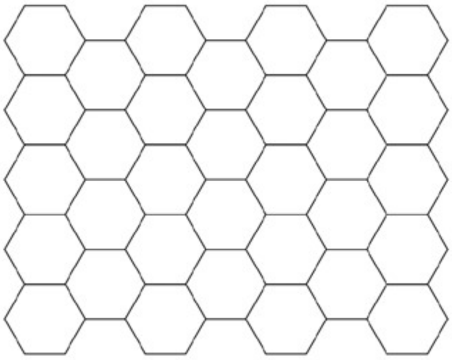

Figura 4. Divisão do plano em hexágonos regulares.

empenhou-se em conseguir fazer com que a sua demonstração fosse analisada por *software* que estuda demonstrações, a fim de obter um grau de certeza superior. E conseguiu fazer isso! O resultado foi um artigo com 21 autores, publicado em 2017; veja-se [6].

Convém deixar claro que este uso de computadores não tem nada a ver com os usos de computadores aos quais já tinha sido feita referência nesta rubrica (em [9]). Nesta demonstração formal, os computadores foram empregues para verificar a própria demonstração e não para fazer cálculos.

Regressando atrás no tempo, é interessante ver o que Hales escreveu (em [5]) sobre o resultado de Gauss segundo o qual a conjetura de Kepler é válida quando os centros das esferas estão distribuídos de uma maneira regular:

> O nome "Gauss" confere um prestígio imerecido a este resultado elementar. A demonstração ocupa poucas linhas e não exige quaisquer cálculos.

Esta demonstração faz de Thomas C. Hales um dos poucos matemáticos que conseguiram resolver um problema com séculos. Acontece que foi a segunda vez na sua carreira que ele fez isso. Em 2001, publicou (veja-se [3]) a demonstração da conjetura do favo de mel, que é a seguinte: se fixarmos uma área, de todas as maneiras de dividir o plano em regiões com a área dada, a divisão em hexágonos regulares (como na figura 4) é aquela que tem o menor perímetro. Ou seja, as abelhas têm um excelente motivo para fazer os favos de mel com forma hexagonal: poupar cera. Já no século I a.C. Marcus Terentius Varro tinha levantado o problema de saber porque é que as abelhas fazem os favos desta maneira (ele conjeturou que estaria ligado ao facto de terem seis patas). E László Fejes Tóth demonstrou, em 1943, que, se se acrescentar a hipótese de que cada região é um polígono convexo, então a melhor opção é precisamente fazer aquilo que as abelhas fazem. E, tal como viria a acontecer com a conjetura de Kepler, Hales levou mais longe as ideias de László Fejes Tóth e conseguiu demonstrar a conjetura no caso geral.

REFERÊNCIAS

[1] Jeremy J. Gray, *The Hilbert Challenge*, Oxford University Press, 2000

[2] Thomas C. Hales, "The Status of the Kepler Conjecture", *The Mathematical Intelligencer* **16** (3), pp. 47-58, 1994

[3] Thomas C. Hales, "The Honeycomb Conjecture", *Discrete & Computational Geometry* **25**, pp. 1-22, 2001

[4] Thomas C. Hales, "A proof of the Kepler conjecture", *Annals of Mathematics* **162**, pp. 1065-1185, 2005

[5] Thomas C. Hales, "Cannonballs and Honeycombs", *Notices of the American Mathematical Society* **47** (4), pp. 440-449 **162**, pp. 1065-1185, 2005

[6] T. C. Hales, M. Adams, G. Bauer *et al*, "A Formal Proof of the Kepler Conjecture", *Forum of Mathematics, Pi*, **5**, E2, 2017

[7] Wu-Yi Hsiang, "On the Sphere Packing Problem and the Proof of Kepler's Conjecture", *International Journal of Mathematics* **4** (5), pp. 739-831, 1993

[8] Jeffrey C. Lagarias, *The Kepler Conjecture and its Proof*. In: Jeffrey C. Lagarias (ed.) *The Kepler Conjecture*, Springer-Verlag, pp.3-26, 2011

[9] José Carlos Santos, "Demonstrações com uso de computadores", Gazeta de Matemática **181**, pp. 30–32, 2017

[10] George G. Szpiro, *Kepler's Conjecture*, John Wiley & Sons, 2003

[3] Jennifer Bails, *Thomas Hales: The Proof of the Proof*, https://pittsburghquarterly.com/articles/thomas-hales-the-proof-of-the-proof/