



FACULDADE DE CIÊNCIAS
UNIVERSIDADE DO PORTO

DEPARTAMENTO DE FÍSICA |

Projecto Faraday Texto 12^o ano

Capítulos 1 a 8

Departamento de Física
Faculdade de Ciências, Universidade do Porto
Fundação Calouste Gulbenkian

Ficha Técnica

Projecto de intervenção no ensino da Física no secundário.

Financiamento

Fundação Calouste Gulbenkian.

Execução

Departamento de Física, Faculdade de Ciências da Universidade do Porto.

Escolas Participantes

- ES Filipa de Vilhena
- ES Fontes Pereira de Melo
- ES Garcia de Orta
- ES da Maia
- ES de Santa Maria da Feira

Coordenação

- J. M. B. Lopes dos Santos
- Manuel Joaquim Marques

Portal

URL: <http://www.fc.up.pt/faraday>

Texto do 12º Ano

Redactor Principal

J. M. B. Lopes dos Santos

Colaboração e revisão

- Elisa Arieiro
- Carlos M. Carvalho
- Manuel Joaquim Marques
- Maria de Fátima Mota

Prefácio

Caro aluno(a):

Ao preparar estes materiais, fomos guiados por um objectivo modesto: mudar a tua visão do mundo.

Não a maneira como te relacionas com outras pessoas, ou as tuas convicções religiosas, sociais ou políticas, ou sequer a tua postura pessoal.

Não é disso que trata a Física. Trata, sim, do funcionamento do mundo que te rodeia, daquilo que vês, ouves e sentes, dos objectos e instrumentos que utilizas, e, sobretudo, de muito que está por trás, e explica, o mundo que experimentamos. É que este mundo físico é muito diferente do que parece à primeira vista.

O que queremos com este projecto é que experimentes um pouco dos métodos e atitudes que nos permitiram compreender e perceber uma variedade imensa de fenómenos, em termos de um conjunto muito reduzido de princípios e leis.

Compreender e perceber, não decorar e executar tarefas sem sentido para ti. Esperamos que, com estes materiais e com as aulas que os teus professores prepararam, te encontres, muitas vezes, perplexo, a pensar sobre o que observaste e mediste. Porque, ao fim e ao cabo, esse é o trabalho mais importante e mais eficiente que podes fazer nesta disciplina.

Os autores

Nota prévia

O processo de formação é sempre também um processo de **emancipação**. À medida que fores progredindo nos teus estudos, seja em que disciplina for, vais descobrir que cada vez se espera mais capacidade de decisão e autonomia da tua parte.

Neste ano vais encontrar questões marcadas com o símbolo \mathcal{ETV} , **É a Tua Vez**, dispersas pelo texto. Nunca vás ver a resposta no fim de cada capítulo, antes de tentares, por ti, responder à questão. É que, quem lê a pergunta e a resposta sem pensar entre uma e outra pode aprender a responder **àquela** pergunta. Quem se habitua a tentar responder sózinho, mesmo que o não consiga sempre, aprende a responder **àquela e a muitas outras perguntas**.

Conteúdo

Ficha Técnica	ii
Prefácio	iv
Nota Prévia	v
I Física Newtoniana	21
1 O Reino de Newton	23
1.1 As revoluções da Física do Século XX	23
1.2 Relatividade e a velocidade da luz	24
1.3 Quântico ou clássico?	25
1.3.1 Futebol é clássico	26
1.3.2 O átomo de hidrogénio é quântico	27
1.4 A vizinhança é Newtoniana	27
1.5 Actividades, questões e problemas	30
1.5.1 Questões	30
1.5.2 Problemas	30
2 O programa newtoniano	33
2.1 Newton entrevistado	33
2.1.1 O programa de Newton	36
2.2 Conceito de Derivada	36
O cálculo de derivadas	38
2.3 Posição e referenciais	41
2.3.1 Vectores posição, velocidade e aceleração	42

	Vector de Posição	42
	Vector velocidade	43
	Vector aceleração	45
2.4	Movimento uniformemente acelerado.	46
2.5	Velocidade, aceleração e geometria	48
2.5.1	Movimento rectilíneo	49
2.5.2	Movimento curvilíneo	50
2.5.3	Acelerações tangencial e normal	50
	Aceleração tangencial	51
	Aceleração normal	52
2.6	Respostas a \mathcal{ETVS}	54
2.7	Actividades, questões e problemas	55
2.7.1	Actividades	55
2.7.2	Questões	55
2.7.3	Problemas	57
3	Forças e ligações	61
3.1	A importância das superfícies	61
3.2	Reacção Normal	62
3.2.1	<i>Loop the Loop</i>	63
	Carro na recta de partida	63
	Carro em B	64
	Carro em D	65
3.3	Forças de atrito	67
3.3.1	Atrito estático	67
3.3.2	Atrito cinético	70
3.4	Cabos, fios e coisas afins	72
3.4.1	Equilíbrio	73
3.4.2	Movimentos acelerados	74
3.4.3	Cabos e fios ideais	77
3.5	Atrito e dissipação	77

<i>CONTEÚDO</i>	3
3.6 Respostas às \mathcal{ETVs}	79
3.7 Actividades, questões e problemas	81
3.7.1 Actividades	81
3.7.2 Questões	82
3.7.3 Problemas	83
3.7.4 Desafios	87
4 Fluidos	89
4.1 Pressão	89
4.1.1 Factos importantes sobre a pressão	91
4.2 Lei fundamental da Hidrostática	93
4.2.1 Direcção das Forças de Pressão.	96
4.2.2 Paradoxo de Hidrostática	96
Tio Alberto, de novo.	98
4.3 Princípio de Pascal	100
4.3.1 Máquinas hidráulicas.	101
4.4 Forças de impulsão	103
4.4.1 Um quebra-cabeças	103
4.4.2 Forças de pressão e princípio de Arquimedes	105
4.4.3 Resposta ao quebra-cabeças	107
4.5 No vazio explodimos?	107
4.6 Repostas aos \mathcal{ETVs}	109
4.7 Actividades, Questões e Problemas	111
4.7.1 Actividades	111
4.7.2 Questões	111
4.7.3 Problemas	113
5 Fluidos em movimento	115
5.1 Velocidade num fluido	115
5.1.1 O conceito de campo	117
5.2 Teorema de Bernoulli	120
5.2.1 Caudal e velocidade	120

5.2.2	Velocidade e linhas de corrente	121
5.3	Viscosidade	124
5.3.1	Dissipação em líquidos	124
5.3.2	Forças de resistência ao movimento num fluido	125
	Regime de Stokes	125
	Regime de Newton	127
5.3.3	Forças de resistência e lei da inércia	128
5.4	Respostas aos $\mathcal{E}\mathcal{T}\mathcal{V}s$	128
5.5	Actividades questões e problemas	130
5.5.1	Actividades	130
5.5.2	Questões	130
5.5.3	Problemas	131
6	Oscilações	135
6.1	Exemplos de osciladores	136
6.1.1	O Pêndulo	136
6.1.2	Flutuador	137
6.1.3	Massa suspensa em mola	138
6.1.4	Absorção de choques	139
6.1.5	Resumo	139
6.2	Movimento Harmónico Simples	140
6.2.1	Equação de movimento	140
6.2.2	Energia de um oscilador	142
6.2.3	Energia do pêndulo	143
6.2.4	A solução	145
	Elongamento, velocidade e energia	145
	O período	148
6.3	Descrição matemática do MHS	150
6.3.1	As funções trigonométricas	150
6.3.2	O Movimento circular e o MHS	152
	A frequência angular	154

6.3.3	Resumo	156
6.3.4	Imaginação em ciência	157
6.4	Ressonância	158
6.4.1	Exemplos de ressonâncias	159
	Sintonização	159
	Instrumentos musicais	159
	Espectros de emissão e absorção	160
6.5	Respostas às \mathcal{ETVs}	160
6.6	Actividades questões e problemas	162
6.6.1	Questões	163
6.6.2	Problemas	164
7	Sistemas de partículas	169
7.1	Momento linear	170
7.1.1	Colisão de dois carros	170
7.1.2	Conservação de momento linear	172
7.1.3	Momento linear e impulso	174
7.1.4	Momento linear e velocidade do centro de massa	175
7.1.5	O centro de massa	176
7.1.6	Determinação de centros de massa	178
	Moléculas diatómicas	178
	Corpos simétricos	179
	Corpos compostos	180
	Geometria variável	181
7.1.7	Propulsão de foguetões	182
7.2	Energia e centro de massa	183
7.2.1	Energia potencial gravítica	183
7.2.2	Energia cinética	183
7.2.3	Energia cinética em colisões	186
	O que é uma colisão?	186

	Coeficiente de restituição	188
	Colisões entre duas partículas	188
	Colisão com estrutura fixa	190
7.3	Conclusões	191
7.4	Respostas aos $\mathcal{ETV}'s$	192
7.5	Actividades questões e problemas	195
7.5.1	Actividades	195
7.5.2	Questões	195
7.5.3	Problemas	198
7.5.4	Desafios	200
8	Gravitação	203
8.1	A Astronomia como Ciência Física	203
8.1.1	Astronomia e Astrologia	203
8.1.2	Observação e medição: Tycho Brahe	204
8.1.3	Organização e sistematização: Kepler	206
8.1.4	As três leis de Kepler	209
	Primeira Lei	209
	Segunda lei	210
	Terceira Lei	210
8.1.5	A teoria e a compreensão: Newton	210
8.1.6	Conclusão antecipada	212
8.2	Astronomia e a Física Newtoniana	213
8.2.1	Campo gravítico de uma esfera	214
8.2.2	A Massa do Sol	216
8.3	As leis de Kepler na Física Newtoniana	217
8.3.1	Órbitas circulares e a terceira lei de Kepler	217
	Determinação de massas de Astros	218
8.3.2	A experiência de Cavendish	218
8.3.3	Órbitas elípticas	221
8.3.4	Lei das áreas	223

8.3.5	Órbitas abertas	224
8.4	Energia no campo gravítico	224
8.4.1	Energia potencial gravítica	224
	Órbitas ligadas e não ligadas	227
8.5	Conclusões	228
8.6	Resposta ao $\mathcal{ETV}'s$	229
8.7	Actividades, Questões e Problemas	231
8.7.1	Actividades	231
8.7.2	Questões	232
8.7.3	Problemas	233

Lista de Figuras

1.1	Se caracterizarmos os fenómenos em termos de valores típicos de massa, M , de distância, L , e de velocidade, V a Física Newtoniana só funciona na região limitada pela superfície curva ($MLV \gg h$) e pelo plano horizontal ($V \ll c$).	29
2.1	Isaac Newton: as suas descobertas dominaram a física por mais de dois séculos.	33
2.2	O “programa” de Newton.	35
2.3	Interpretação geométrica de uma velocidade média.	37
2.4	Se $x = mt + b$ o declive da recta, é $m = (x_2 - x_1)/(t_2 - t_1) = \Delta x/\Delta t$	37
2.5	O declive da tangente aumenta com t	38
2.6	Algumas funções e suas derivadas. Note-se que adicionar uma constante (gráfico a tracejado, painel do centro à esquerda) não altera o valor do declive da tangente ao gráfico, isto é, da derivada.	40
2.7	A escolha de um sistema de eixos, em geral, é determinada por um conjunto de corpos que mantêm posições relativas fixas durante o processo em estudo.	42
2.8	Vector de posição e coordenadas de uma partícula.	43
2.9	Qual é o vector $\vec{a} - \vec{b}$?	44
2.10	Queda sob acção do peso.	46
2.11	Se a aceleração for paralela à velocidade, a direcção desta não varia.	49
2.12	A aceleração faz variar o módulo e a direcção da velocidade.	51

2.13	A componente paralela Δv_{\parallel} faz variar o módulo de \vec{v} ; a componente Δv_{\perp} , roda a direcção de \vec{v}	51
2.14	Numa secção suficientemente pequena podemos aproximar uma trajectória por uma circunferência: o raio dessa circunferência é o raio de curvatura nesse ponto.	52
2.15	Versores da aceleração tangencial e normal.	52
2.16	Quais são a velocidade e aceleração?	55
2.17	Qual é a aceleração?	55
2.18	O que há de errado com esta figura?	56
2.19	Qual cai mais depressa?	56
2.20	Quais são as trajectórias?	56
2.21	Quais são a velocidade e aceleração?	58
2.22	Se largadas em simultâneo as duas esferas podem colidir em pleno ar.	59
2.23	Passará a tempo?	59
2.25	Salto de moto.	60
2.24	Haverá perigo de colisão?	60
3.1	Se a reacção normal da mesa não fosse igual, em módulo, ao peso da chávena, esta não ficaria em repouso.	61
3.2	Se a superfície for rígida e o corpo estiver inicialmente em repouso, a reacção normal \vec{N} , anula a componente do peso perpendicular à superfície e o corpo começa a movimentar-se sob a acção da resultante, \vec{R} , na direcção paralela à superfície.	62
3.4	Conseguirá o carro completar o <i>loop</i> ?	63
3.3	Por que é que os carrinhos não caem ao fazer o <i>loop</i> ?	63
3.5	Início do movimento circular.	64
3.6	Quanto vale a reacção normal em D?	65
3.7	No caso (a) a direcção da reacção normal significa que a pista está a ser pressionada pelo carro. O caso (b) só possível se o carro deslizar em calhas que o impeçam de se separar da pista. De outro modo já teria descolado.	65

3.8	Por que é tão difícil deslocar um carro travado? . . .	67
3.9	A área de efectivo contacto entre os materiais de dois corpos é muito menor do o que que parece à nossa escala.	68
3.10	Lei de Amonton-Coulomb: (a) se a força externa, for inferior em módulo a μN , o módulo da força de atrito é igual ao da força externa; (b) se $F > \mu N$ o corpo entra em movimento.	69
3.11	Por que custa tanto remover um prego?	70
3.12	(a) Corpo suspenso numa corda; (b) forças sobre a corda; (c) forças sobre uma secção qualquer da corda.	73
3.14	Esquema de montagem experimental usada na actividade A22.	74
3.13	A corda estará em equilíbrio se os módulos da forças \vec{F}_1 e \vec{F}_2 forem iguais; mas estas duas forças não têm resultante nula. A resultante das forças de reacção normal da barra, \vec{N} , equilibra $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$	74
3.15	Equanto a massa suspensa cai, o carro tem um movimento uniformemente acelerado (velocidade a crescer linearmente no tempo).	74
3.16	A aceleração do sistema é 10 m s^{-2} . A resultante das forças que actuam na corrente vale 50 N.	76
3.17	As forças de reacção normal sobre a superfície lateral do prego são elevadas.	80
3.18	Como varia a força exercida pelo disco na vara? . . .	83
3.20	A componente da força de atrito no plano da figura pode ser nula.	85
3.19	A água do escorrega diminui o atrito.	85
3.21	A força lida no sensor aumenta ou diminui quando deixamos o carrinho andar?	87
3.22	Qual é a tensão da corda?	87
3.23	Pêndulo cónico.	87
4.1	Mesmo que as forças exercidas no solo pela havaiana (a) e pelo sapato de tacão (b) sejam iguais, as forças exercidas em cada rectângulo de igual área são muito maiores no segundo caso.	89

4.2	Cada pequeno quadrado da zona sombreada está em contacto com fluido com idênticas propriedades; as forças em cada quadrado são iguais.	90
4.3	Abaixo de uma certa profundidade não é possível respirar por um tubo.	91
4.4	A parte inferior da coluna de líquido tem que exercer forças sobre a parte superior que cancelem as forças de pressão atmosférica e o peso da mesma. .	93
4.5	A pressão P é $P_0 + \rho gh$. Porquê?	95
4.6	As forças de pressão são perpendiculares à superfície através da qual se exercem.	96
4.7	Paradoxo hidrostático: os dois recipientes tem a mesma área na base. Em qual deles é maior a pressão no fundo do recipiente?	98
4.8	Será que a pressão é maior na base da coluna mais alta?	99
4.9	A porção de fluido sombreada não pode estar em equilíbrio se a pressão no centro for maior que na borda.	99
4.10	Se a pressão aumentar no sentido da seta, a resultante das forças de pressão no elemento sombreado, \vec{R} , não é nula e tem sentido oposto ao do aumento de pressão.	101
4.11	Princípio de amplificação hidráulica. Se empurrarmos com uma força de módulo F em E , a força exercida em S vale $F \times A'/A$	102
4.12	O módulo da força \vec{F} é metade do peso. Mas para elevar a carga de h , o ponto de aplicação de \vec{F} desloca-se de $2h$	102
4.13	Se a pedra for atirada à água, o nível de água da piscina sobe ou desce?	103
4.14	Um corpo feito de um material mais denso que a água pode flutuar se a sua forma permitir um volume imerso superior ao volume efectivamente ocupado pelo material denso.	105
4.15	A resultante das forças de pressão é a força de impulsão.	106

4.16	Um corpo com forma tão irregular como uma batata pode imaginar-se cortado em fatias prismáticas para calcular a força de impulsão total.	106
4.17	Se o volume ocupado pelo barco com a pedra, V_1 for superior ao volume ocupado pelo barco, V_b , mais o volume da pedra, V_p , o nível da água desce.	107
4.18	A garrafa não fica espalmada pela pressão do ar no exterior, porque a pressão no interior é igual à exterior. Mas a parede da garrafa é comprimida nas duas faces (interna e externa) por forças da ordem de 10 N cm^{-2}	108
4.19	As pressões em A e B devem ser iguais.	110
4.20	As superfícies A_1 e A_2 exercem forças verticais no fluido.	110
4.21	Como varia a pressão com a profundidade?	111
4.22	Um maneira de medir densidades relativas.	111
4.23	Se a força \vec{F} em E dá origem a uma força \vec{F}' em S com módulo maior de um factor A'/A , o sistema representado estaria em equilíbrio. Como é isso possível se a resultante da forças aplicadas não é nula?	112
4.24	Uma máquina de fazer energia?	112
4.25	Que força é necessária para separar os cilindros?	113
4.26	Qual é a resultante das forças de pressão numa semi-esfera?	113
4.27	Quanto pesa a barçaça?	114
4.28	Qual é a espessura da parede da esfera?	114
4.29	Qual é indicação da balança?	114
4.30	Se a bola de baixo estiver cheia de água, a de cima flutua?	114
5.1	No movimento de translação da moeda todos os pontos têm o mesmo deslocamento.	115
5.2	A velocidade $\vec{v}(\vec{r}, t)$ é a velocidade da partícula de fluido que está em \vec{r} no instante t	116
5.3	Dois tipos de anemómetro	117

5.4	Um exemplo de escoamento de um fluido em torno de uma esfera. Cada seta representa o vector velocidade do ponto onde tem origem. Note-se como o fluido circula à volta da esfera e tem velocidade muito pequena junto dela.	118
5.5	Uma representação do campo de velocidades com linhas de corrente.	119
5.6	As linhas de corrente em t_1 e t_2 não são as mesmas porque o torniquete roda. Uma partícula de fluido tem uma trajectória tangente a uma linha de corrente em t_1 e a outra linha de corrente em t_2	120
5.7	Num intervalo de tempo Δt , a torneira injecta na mangueira um cilindro de água de altura $v\Delta t$	120
5.8	O fluido marcado a sombreado mantém-se dentro do mesmo tubo de linhas de corrente.	121
5.10	O fluido em B tem uma velocidade maior do que em A . Uma partícula de fluido acelera ao passar de A para B . A pressão é maior onde as linhas de corrente estão mais afastadas.	123
5.9	Se a pressão aumentar no sentido da seta, a resultante das forças de pressão no elemento sombreado, \vec{R} , não é nula e tem sentido oposto ao do aumento de pressão.	123
5.11	A velocidade do ar é maior por cima da asa, onde as linhas de corrente se aproximam, que por baixo. Logo a pressão é maior em baixo e a resultante das forças de pressão empurra a asa para cima.	124
5.12	A camada A exerce forças de viscosidade sobre a camada B , através do plano que as separa, que tendem a anular a diferença de velocidade entre as duas camadas de fluido.	125
5.13	A expressão da força de resistência de Newton dá um valor superior à de Stokes para velocidades altas e menor para velocidades baixas.	128
5.14	Uma linha de corrente?	130
5.15	Um escoamento num canal.	130
5.16	Qual é a velocidade de saída do líquido?	130
5.17	Qual é a velocidade de saída de água no orifício?	131

5.18	Que pressão é necessária para ter um repuxo? . . .	131
6.1	A posição de equilíbrio estável é o centro da taça. .	135
6.2	Na posição de equilíbrio a resultante das forças sobre o corpo é nula (a). Fora desta posição a tensão do fio e o peso do corpo deixam de ser colineares; a resultante acelera o corpo em direcção à posição de equilíbrio (b).	137
6.3	Na situação de equilíbrio a resultante do peso e da impulsão, \vec{R} , é nula, (a). O sentido da resultante é oposto ao deslocamento da posição de equilíbrio, portanto o corpo oscila se o equilíbrio for perturbado, (b) e (c).	138
6.4	A resultante das forças sobre a esfera tem o sentido oposto do deslocamento da posição de equilíbrio. .	138
6.5	Amortecedores de um carro. Adaptado de [3]. . .	139
6.6	O comprimento da mola é $l_e - y(t)$	141
6.7	Energia potencial e força elástica de uma massa suspensa numa mola.	143
6.8	Como escrever a energia potencial do pêndulo? . .	144
6.9	Gráficos de posição e velocidade de um oscilador em função do tempo.	147
6.10	Qual é frequência deste oscilador?	150
6.11	As projecções da força centrípeta nos eixos Ox e Oy , F_x e F_y , são proporcionais a $x(t)$ e $y(t)$, respectivamente.	155
6.12	O vector velocidade e o vector de posição de um movimento circular fazem um ângulo de $\pi/2$	156
6.14	(a) Se a força externa, f_{ext} , tiver o mesmo período que a velocidade do oscilador, o trabalho realizado pode ser sempre positivo. Se o período for diferente (menor no caso (b)), há ciclos de trabalho positivo e ciclos de trabalho negativo.	158
6.13	Se a força tiver o mesmo período do oscilador, pode realizar sempre trabalho positivo, transferindo energia para o oscilador.	158
6.15	Energias cinética e potencial em função do tempo para o caso de um oscilador sem dissipação.	161

6.16	Se os períodos forem iguais, os dois pêndulos mantêm-se sincronizados.	162
6.17	Qual das curvas corresponde à massa com cartolina?	164
6.18	Quanto tempo dura o lançamento?	164
6.19	Elongamento em função do tempo.	165
6.20	Velocidade em função do tempo.	165
6.21	O arqueiro puxa a seta de uma distância x . A força que tem que exercer é simétrica da força do arco na flecha.	165
6.22	Qual é frequência deste oscilador?	166
6.23	Qual é frequência deste oscilador?	166
6.24	Qual é frequência deste oscilador?	166
7.1	Apesar dos seus movimentos complexos, a única força externa significativa sobre um saltador é o seu peso.	169
7.2	Embora o movimento de um corpo em voo possa ser complexo, o seu centro de massa tem o movimento parabólico habitual de uma queda livre.	170
7.3	Colisão de dois carros. Na medida em que cada um deles tem um movimento de translação, este sistema é constituído por duas partículas.	171
7.4	Se somarmos todas as forças que actuam nas partículas do sistema S , 1, 2 e 3, as forças internas (a cheio) cancelam, pois podem ser agrupadas em pares acção–reacção. Ficam apenas as forças externas (a tracejado), pois os pares destas são exercidos em partículas que não pertencem a S	173
7.5	Se a origem for o ponto médio entre os dois núcleos $\vec{r}_2 = -\vec{r}_1$	178
7.6	As trajectórias dos núcleos podem ser complexas, por causa da rotação e vibração da molécula; a do centro de massa é rectilínea, se não houver forças externas.	179
7.7	O centro de massa da esfera coincide com o seu centro geométrico. Podemos considerá-la constituída por partículas idênticas com vectores de posição simétricos, \vec{r} e $-\vec{r}$, relativamente ao centro da esfera.	179

7.8	O centro de massa desta esfera está sobre o eixo representado tracejado, que passa pelo centro da esfera. Mas a sua posição sobre o eixo depende das massas volúmicas das metades direita e esquerda da esfera.	179
7.9	Para efeito de cálculo do centro de massa do sistema Terra-Sol cada um destes astros pode ser considerado uma partícula com toda a sua massa concentrada no respectivo centro de massa (o desenho não está à escala).	180
7.10	A posição do centro de massa deste sistema varia com o ângulo entre as duas barras. Se uma girar sobre a outra o centro de massa do sistema tem uma trajectória circular.	181
7.11	Qual é velocidade do segundo fragmento?	193
7.12	Onde está o centro de massa do anel?	196
7.13	Só há um ponto de fixação para o qual a cartolina não oscila.	196
7.14	Esboço policial de uma colisão entre dois automóveis.	197
7.15	Qual é variação de energia potencial gravítica da corrente?	198
7.16	Onde está o centro de massa deste "L"?	198
7.17	Colisão entre duas partículas de igual massa	199
7.18	Qual é a velocidade da bala?	200
8.1	Um dos instrumentos de Tycho Brahe [2].	204
8.2	Os cinco sólidos platónicos: (a) tetraedro; (b) cubo; (c) octaedro; (d) dodecaedro; (e) icosaedro.	208
8.3	Modelo de sistema solar de Kepler, baseado nos sólidos platónicos (in <i>Mysterium Cosmographicum</i> , 1596).	208
8.4	Esta secção plana do cone é uma elipse.	209
8.5	A soma das distâncias $d_1 + d_2$ a cada um dos focos é a mesma para todos os pontos de uma elipse. . .	209
8.6	Se o tempo que decorre entre a passagem de planeta entre A e B é o mesmo que entre C e D , as áreas sombreadas são iguais.	210

8.7	Todos os corpos se atraem mutuamente, em virtude da interacção gravítica.	212
8.8	O campo gravítico de uma esfera no seu exterior (b), é idêntico ao de uma massa pontual no seu centro (a). As linhas de campo são tangentes à aceleração gravítica em cada ponto do espaço.	214
8.9	A aceleração da gravidade da Terra, no seu exterior, diminui como $\sim 1/r^2$ em que r é distância ao centro da Terra. No interior da Terra a aceleração gravítica é descrita por uma função diferente. . . .	215
8.10	Quanto mais afastadas do eixo forem exercidas as forças \vec{F} e $-\vec{F}$, menor é intensidade necessária para torcer o fio de um dado ângulo.	220
8.11	Órbitas possíveis em torno da Terra.	222
8.12	Na órbita circular a força é perpendicular à velocidade e esta mantém-se constante. Na órbita elíptica \vec{F} tem uma componente anti-paralela a \vec{v} de P para A e paralela a \vec{v} de A para P	223
8.13	d é uma órbita aberta.	224
8.14	Capa da novela, <i>Rendez-Vous with Rama</i> , de Arthur C. Clark.	224
8.15	Para deslocar o corpo de A para B temos que realizar trabalho externo: a energia potencial do corpo aumenta.	224
8.16	Energia potencial gravítica de um corpo em função da distância ao centro do astro que cria o campo gravítico. Se a energia do corpo for E_1 , a sua distância ao astro é sempre inferior a r_1 : a energia total não pode ser inferior a E_p pois a energia cinética é positiva.	227
8.17	O campo gravítico é quase uniforme numa região de dimensões lineares muito menores que o raio da Terra. . .	230
8.18	Que manobras fazer para passar da órbita circular a para c ?	233

Lista de Tabelas

1.1	Algumas velocidades típicas.	28
2.1	Tabela de derivadas: a é uma constante independente de t . Ver os gráficos destas funções e das suas derivadas na figura 2.6.	39
2.2	Tabela de velocidades.	56
3.1	Coefficientes de atrito entre algumas substâncias (superfícies secas). Estes valores são extremamente sensíveis às condições das superfícies.	69
5.1	Tabela de viscosidades de alguns líquidos.	127

Parte I

Física Newtoniana

Capítulo 1

O Reino de Newton

1.1 As revoluções da Física do Século XX

O Mundo adora heróis. Mas adora ainda mais vê-los cair em desgraça. Por isso os anúncios periódicos de que Einstein estaria errado¹ recebem honras de *prime time* nos noticiários com muito mais facilidade de que uma nova experiência que confirme as suas teorias.

Não admira que, para muitos, Newton passe por um rei destronado pelos avanços da Física do século XX. De facto, como iremos estudar este ano, as descobertas das Teorias da Relatividade Restrita e Relatividade Geral (Teoria da Gravitação) de Einstein, abalaram profundamente os alicerces da visão Newtoniana do mundo. Como se isso não bastasse, a revolução quântica iniciada por Planck no último ano do século de XIX, continuada por Einstein e levada a cabo por Heisenberg, Schrödinger, Bohr, Dirac, etc, pôs em causa o universo newtoniano de um modo ainda mais radical do que a Relatividade.

Neste ano, um pouco mais para a frente, teremos oportunidade de iniciar o estudo destas duas revoluções da Física do século XX. Contudo, antes disso, iremos alargar consideravelmente a nossa exploração da Física Newtoniana.

A questão que nos ocupa neste capítulo é:

por que é que todo o estudo sério de Física começa pela teoria Newtoniana? Os médicos não começam

¹Estes anúncios têm-se revelado muito prematuros e temerários!

por estudar as obras de Galeno; nem os engenheiros mecânicos estudam carroças! Será que os físicos têm uma predilecção especial pela história?

A resposta curta, como iremos ver, é:

desde o início da Física como ciência moderna no século XVII, **nenhuma** das suas teorias fundamentais se tornou obsoleta. O progresso em Ciência tem características diferentes do de muitas outras actividades humanas.

1.2 Relatividade e a velocidade da luz

▷ A importância da velocidade da luz no vazio está reflectida até no sistema de unidades, SI. O seu valor é definido: a unidade de comprimento é definida a partir do valor de c .

Na Física Newtoniana a escala de velocidades é democrática. Não há nenhum valor especial de velocidade. Em Relatividade a velocidade da luz no vazio,

$$c = 2,99792458 \times 10^8 \text{ m s}^{-1},$$

é especial.

Em primeiro lugar, porque é a máxima velocidade possível para qualquer corpo.

Em segundo lugar, porque é uma constante universal: tem o mesmo valor para qualquer observador, independentemente do seu estado de movimento.

Este simples facto implicou uma profunda e inesperada revisão dos conceitos de espaço e de tempo e abalou profundamente alguns pressupostos da Física Newtoniana. Mas a Relatividade não alterou o facto de a Física Newtoniana prever e explicar uma enorme gama de fenómenos. Por isso, forçosamente, para essa gama de fenómenos, teria que dar a mesmas respostas e previsões. De outro modo estaria em desacordo com a experiência.

O que acontece então é que a mecânica relativista de Einstein **inclui** a Física Newtoniana, como caso limite, quando as velocidades dos corpos são muito mais pequenas que a da luz. Esquemáticamente,

Se $v \ll c$, Relatividade Restrita \rightarrow Física Newtoniana.

A gama de fenómenos que cabem no quadro de explicação racional da Relatividade é muito mais vasta que para o caso da teoria de Newton. Para isso, foram necessárias modificações profundas dos conceitos de espaço e de tempo. Mas o mundo onde Newton reina permanece: o mundo de velocidades muito inferiores à da luz.

Algo semelhante aconteceu com a revolução quântica do século XX. As modificações foram ainda mais radicais. O próprio conceito de grandeza, ou mesmo de objecto ou de propriedade física, foi alterado. Partículas podem estar em muitos sítios ao mesmo tempo, os fenómenos são ditados pelo acaso, as ondas são partículas e as partículas são ondas, etc, etc. Sem estas “complicações” não teria sido possível compreender fenómenos às escalas atómica e sub-atómica: o espectro dos átomos, a ligação química, a energia nuclear, as propriedades dos sólidos, a electrónica, a radioactividade, as partículas sub-atómicas, a interacção radiação-matéria, ...

Neste contexto sobrevive ainda um reino newtoniano? Certamente que sim. Todavia, o critério que nos permite saber se um dado fenómeno é bem descrito por leis pré-quânticas é um pouco mais complexo que no caso da relatividade.

1.3 Quântico ou clássico?

Na Física quântica surge, tal como em Relatividade, uma nova constante universal, a constante de Planck

$$h = (6,6260688 \pm 0,0000005) \times 10^{-34} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}.$$

Mas que grandeza é esta, com estas unidades esquisitas?

Os físicos chamam-lhe **Acção**, por razões que demoraria muito a explicar. Não é uma grandeza que já tenhamos encontrado. Mas, mesmo sem saber o que é, podemos notar que as suas unidades são as que se obtêm multiplicando três grandezas que usamos para caracterizar fenómenos mecânicos: massa, M (kg), comprimento, L (m), e velocidade, V (m s⁻¹). Isto é, um produto

$$M \times L \times V$$

tem exactamente as unidades de uma acção, ou seja de h .

Podemos agora formular a receita que nos permite saber se os efeitos quânticos de um dado fenómeno são importantes, ou, pelo contrário, podem ser ignorados. Infelizmente, neste momento, não

é possível explicar por que razão funciona. Isso exigiria um conhecimento mais detalhado da física quântica.

A receita é, então, a seguinte.

- Para um determinado fenómeno encontramos valores típicos de massa, M , de distância, L , e de velocidade, V ;
- fazemos o produto destas três grandezas e comparamos com a constante de Planck, $h = 6,6 \times 10^{-34} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}$. Se $MLV \gg h$, os efeitos quânticos não são importantes e podem ser ignorados. Se $MLV \sim h$ ou $MLV < h$ os efeitos quânticos são fundamentais.

Alguns exemplos tornam isto mais claro.

1.3.1 Futebol é clássico

Vejamos o exemplo da trajectória de uma bola de futebol.

A respectiva massa é $m \approx 430 \text{ g}$. Não precisamos, certamente, de definir a posição da bola à escala atómica, do angstrom; a própria superfície da bola tem irregularidades com dimensões muito superiores a 1 \AA . Os árbitros não conseguem dizer se a bola está 1 \AA para lá ou para cá da linha de golo (às vezes nem um metro). Digamos que em situações de movimento de bolas de futebol raramente teremos que considerar distâncias inferiores a um milímetro, ou seja, $L \sim 10^{-3} \text{ m}$.

A bola pode atingir velocidades perto dos $100 \text{ km h}^{-1} \approx 30 \text{ m s}^{-1}$. Dificilmente teremos que considerar velocidades inferiores a $1 \text{ mm s}^{-1} = 10^{-3} \text{ m s}^{-1}$. Punhamos então $V \sim 10^{-3} \text{ m s}^{-1}$. Se a velocidade típica for maior, o produto MLV será ainda maior. Temos então as seguintes escalas de massa, distância e velocidade:

- $M \sim 4 \times 10^{-1} \text{ kg}$;
- $L \sim 10^{-3} \text{ m}$;
- $V \sim 10^{-3} \text{ m s}^{-1}$;

A **acção** característica deste fenómeno é o produto

$$M \times L \times V \sim 4 \times 10^{-7} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1} \gg h$$

O movimento de uma bola de futebol é clássico (embora às vezes o desacordo entre adeptos leve a parecer que a incerteza quântica desempenha um papel no futebol).

A escolha das escalas de comprimento ou velocidade pode ter parecido um pouco arbitrária. Mas repare-se que um factor de dez para cima ou para baixo não teria qualquer consequência na nossa conclusão.

1.3.2 O átomo de hidrogénio é quântico

O segundo exemplo é o do movimento do electrão no átomo de hidrogénio. A massa do electrão é

$$m_e = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg.}$$

O tamanho do átomo, região onde se move o electrão, é da ordem do angstrom:

$$L \sim 1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m.}$$

Qual é velocidade do electrão dentro do átomo?

Sabemos que é necessária uma energia de $13,6 \text{ eV} = 2,18 \times 10^{-18} \text{ J}$ para tirar um electrão ao átomo. A energia do electrão no átomo é potencial e cinética. Imaginando que não são muito diferentes uma da outra (isto é, que uma não é um milhão de vezes inferior à outra), podemos **estimar**

$$\frac{1}{2} m_e v^2 \sim 2 \times 10^{-18} \text{ J}$$

e, usando o valor de $m_e \sim 10^{-30} \text{ kg}$,

$$v \sim \sqrt{\frac{4 \times 10^{-18}}{10^{-30}}} \sim 2 \times 10^6 \text{ m s}^{-1}.$$

Sendo assim, a acção típica é

$$m_e \times L \times v \sim 10^{-30} \times 10^{-10} \times 2 \times 10^6 \sim 2 \times 10^{-34} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1} \sim \frac{h}{3}$$

O movimento do electrão no átomo é, seguramente, quântico.

1.4 A vizinhança é Newtoniana

Um ser humano tem uma massa de algumas dezenas de quilogramas, mede entre um a dois metros e move-se a cerca de metro

	$v/\text{km h}^{-1}$	$v/\text{m s}^{-1}$
Andar	6	1,7
Correr	36	10
Fórmula 1	350	97
Avião Comercial	900	250
Som (ar)	1224	340
<i>Voyager I</i>	$6,0 \times 10^4$	$1,6 \times 10^4$
Luz (vazio)	$1,1 \times 10^9$	$3,0 \times 10^8$

Tabela 1.1: Algumas velocidades típicas.

por segundo. Não é um acidente que a nossa massa, dimensões e velocidades sejam grandezas da ordem da unidade, **no nosso sistema de unidades!** Foi por isso que escolhemos este sistema. É o mais conveniente para nós.

É importante notar que, neste contexto, quando dizemos que uma grandeza é da ordem da unidade não queremos dizer que seja 1,01 ou 0,98: estamos a referir-nos à **ordem de grandeza**. Escrevendo os valores das grandezas em notação científica, com um algarismo significativo à esquerda da vírgula decimal, o expoente de base dez é a medida da ordem de grandeza. Quando dizemos que uma massa, ou uma distância ou velocidade, tem um valor da ordem da unidade quando expresso no SI, estamos a afirmar que o respectivo expoente é pequeno, 0, ± 1 , $\pm 2 \dots$, e não ± 20 , $\pm 30 \dots$.

Assim sendo, quando estimamos um produto $M \times L \times V$ com valores típicos de fenómenos à nossa escala, obtemos valores em geral muito superiores à constante de Planck que, no nosso sistema de unidades habitual, tem um valor pequeníssimo, quase zero:

$$h = 0,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,6\,\text{kg m}^2\,\text{s}^{-1}.$$

Isto é, os fenómenos à nossa escala não são quânticos.

O mesmo se passa em relação à velocidade da luz, como mostra a tabela 1.1. O mais rápido dos veículos humanos, a *Voyager I*, tem uma velocidade inferior a um décimo milésimo da velocidade da luz.

Em resumo, a nossa vizinhança é Newtoniana. Podemos imaginar um espaço com três eixos, L , M e V , em que um determinado fenómeno é representado por coordenadas que são as respectivas

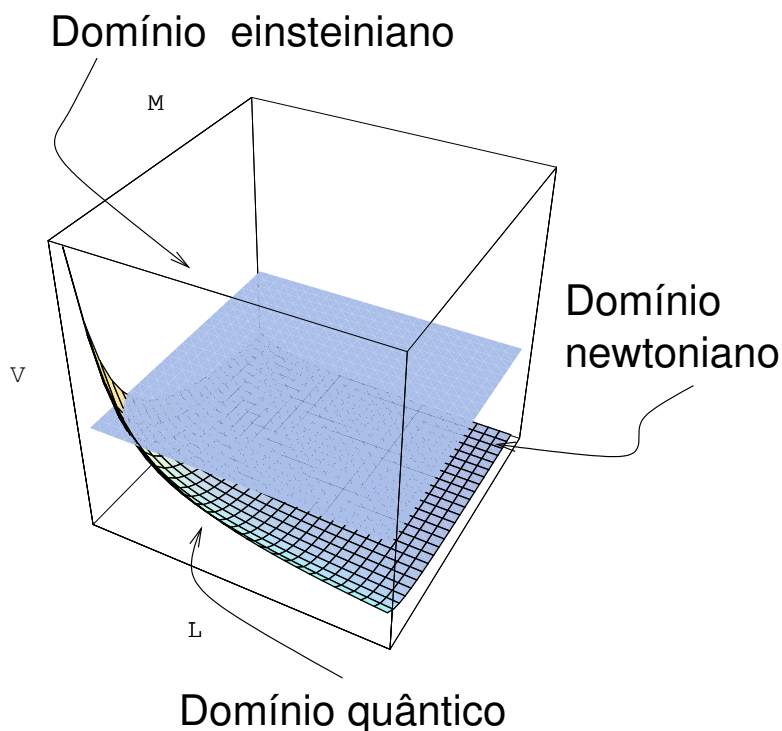


Figura 1.1: Se caracterizarmos os fenômenos em termos de valores típicos de massa, M , de distância, L , e de velocidade, V a Física Newtoniana só funciona na região limitada pela superfície curva ($MLV \gg h$) e pelo plano horizontal ($V \ll c$).

escalas de comprimento, massa e velocidade. Como mostra a figura 1.1, a validade da física Newtoniana não é universal. A superfície curva limita uma região à volta da origem e dos eixos em que os efeitos quânticos não podem ser desprezados. O plano perpendicular ao eixo de velocidades, indica que, para velocidades elevadas, temos correções relativistas. Mas o valor elevado de c e o valor muito pequeno de h , quando expressos nas nossas unidades, significam que o reino de Newton é ainda vastíssimo e merece a nossa completa atenção. A Física Newtoniana não está obsoleta, e, provavelmente, nunca estará.

1.5 Actividades, questões e problemas

1.5.1 Questões

- 1.1. Na última frase deste capítulo afirma-se que a Física Newtoniana, provavelmente, nunca será obsoleta. Concordas? Escreve um pequeno ensaio a defender a tua posição.

1.5.2 Problemas

- 1.1. Estimar a acção característica da órbita da Terra e verificar se é necessário considerar correcções quânticas.
- 1.2. No tubo de um monitor CRT os electrões embatem no écran com energias cinéticas da ordem do 20 keV. A sua posição tem que estar definida à escala de distâncias de um pixel. Um monitor de 17" (de diagonal) pode ter um número de pixéis da ordem dos 1024×768 . (1" = 2,54 cm; os pixéis são elementos de imagem quadrados, em geral).
- (a) Usando estes dados, verificar se o movimento do electrão é relativista.
- (b) Estimar a acção típica de um electrão num monitor CRT e verificar se o respectivo movimento pode ser descrito classicamente, sem correcções quânticas.
- 1.3. A velocidade típica de movimento de uma molécula de água pode ser estimada a partir da temperatura, T , em kelvin, usando a seguinte relação:

$$E_c \sim \frac{3}{2} k_B T$$

em que E_c é a energia cinética da molécula e k_B a constante de Boltzmann. Uma escala de distâncias, L , pode ser obtida a partir do volume por molécula,

$$V_{\text{mol}} \sim L^3,$$

o qual pode ser calculado a partir da massa volúmica da água e da massa de uma molécula.

- (a) Será que o movimento das moléculas de água, à temperatura ambiente tem efeitos quânticos apreciáveis?

1.4. Mostrar que o critério para que o movimento de uma partícula de massa m seja não relativista, é equivalente a afirmar que a sua energia cinética tem que ser muito menor que a sua energia relativista em repouso, $E = mc^2$.

- (a) Um feixe de partículas α com energia cinética de 5 MeV é relativista?
- (b) E um feixe de electrões com a mesma energia cinética?

Capítulo 2

O programa newtoniano

Dado, por um instante, uma inteligência que pudesse englobar todas as forças que animam a Natureza e a respectiva situação dos seres que a compõem — uma inteligência suficientemente vasta para submeter esta informação a análise — ela compreenderia numa única fórmula os movimentos dos maiores corpos do Universo e os dos mais leves átomos; para ela nada seria incerto e o futuro como o passado estaria presente a seus olhos.

Pierre Simon de Laplace

2.1 Newton entrevistado

P: *Professor Newton: muitos consideram o seu livro Principia como a mais importante obra científica da Humanidade. Concorda?*

Newton: Sem dúvida!

P: *Não somos muito modestos, Professor!*

Newton: O senhor é modesto?

P: *Acho que sim!*

Newton: Provavelmente tem boas razões para o ser. Eu tenho muito boas razões para não ser.

P: *Sim? Quais?*

Newton: Quer dizer, para além de ter formulado (no livro que referiu) as leis universais do movimento na Terra e nos Céus; de



Figura 2.1: Isaac Newton: as suas descobertas dominaram a física por mais de dois séculos.

descobrir a atracção gravítica dos corpos e de ter explicado o movimento de todos os astros do sistema solar, até de astros que não sabia existirem no meu tempo; de ter explicado os fenómenos de marés; de usarem as minhas leis, trezentos anos depois, para desenharem aviões, sondas espaciais, foguetões etc?

P: *Quê? Ainda há mais?*

Newton: Poderia mencionar que também inventei o Cálculo Infinitesimal, para poder formular as leis de movimento, o que só por si faz de mim um dos grandes da Matemática, mas isso foi apenas um desvio necessário das minhas principais preocupações. Também há os meus trabalhos sobre Óptica. O mais importante é que estabeleci um programa que dominou a Física até ao fim do século XIX.

P: *Um programa? Que espécie de programa?*

Newton: Vou tentar ser sintético, pois já lhe disse que estou muito ocupado: ando a estudar o que os meus colegas do século XXI dizem sobre cordas heteróticas. Conhece a minha segunda lei?

P: *Recorde-ma por favor.*

Newton: Eu bem tinha razão quanto à sua modéstia! Pois bem! Ela afirma que a aceleração de um corpo é proporcional à totalidade das forças que actuam sobre ele.

P: *Ah sim, já me lembro é o*

$$\vec{F} = m\vec{a}.$$

Newton: Correcto! Pois bem o programa é este:

Primeiro: conhecer as forças. Eu próprio dei logo um exemplo: as leis da força gravítica, uma força universal, atractiva, que existe entre todos os corpos. Esse exemplo serviu de modelo ao que poderiam ser outras forças. Elas existem porque os corpos interagem. Conhecer as forças é conhecer as leis que regem essas interacções. Se soubermos essas leis sabemos então calcular a força num dado corpo. Ficamos a conhecer o primeiro membro da segunda Lei para qualquer corpo.

P: *E depois?*

Newton: Segundo: calcular as acelerações. Sabendo as forças calculamos as acelerações, dividindo pelas massas dos corpos.

Terceiro: usar as acelerações para calcular novas posições e velocidades. Aqui é que entra o Cálculo Infinitesimal. Toda a gente sabe

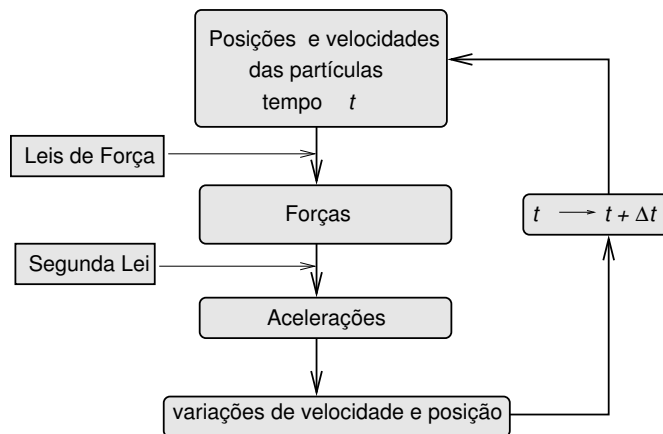


Figura 2.2: O “programa” de Newton.

que a aceleração está relacionada com a variação de velocidade e a velocidade com a variação de posição. Eu encontrei maneira de tornar estas ideias mais precisas, de modo a ser possível a partir da aceleração calcular novas velocidades e posições, para o futuro e passado.

Está a ver? Se num dado momento conhecermos as posições e velocidades dos corpos, aplicamos as leis de força e calculamos as forças. Usando a segunda lei, determinamos as acelerações. Destas tiramos as novas posições e velocidades, para o futuro ou para o passado, com as quais podemos continuar a calcular forças, acelerações, por aí adiante.

Quando aquele francês, Laplace, disse que, para uma inteligência que pudesse englobar todas as forças que animam a natureza e a situação dos seres que a compõem, nada seria incerto e o futuro como o passado estaria presente a seus olhos, de que acha que estava a falar?

P: *Então é esse o programa?*

Newton: No essencial sim. É claro que não o deixei completo. A lei da gravitação era importante mas não era a única. Foi preciso muito trabalho para descobrir as leis da interacção electromagnética, por exemplo. A aplicação das minhas leis de movimentos a sistemas complicados como os fluidos também exigiu muita perícia, embora eu já tivesse estudado ondas sonoras. Para lhe dizer a verdade até a Relatividade daquele sujeito de nacionalidade incerta, Einstein, embora com alterações importantes, se integra dentro deste programa. Agora a Mecânica Quântica é que não é

mecânica nenhuma! Deviam dar-lhe outro nome!

2.1.1 O programa de Newton

Na primeira parte do ano vamos alargar um pouco a exploração deste programa de Newton, relativamente ao que fizemos nos anos anteriores.

Um aspecto importante desse programa tem a ver com a necessidade de passar de aceleração para velocidade e posição e vice-versa. Para isso teremos que relacionar estes conceitos com uma ferramenta matemática fundamental para descrever a variação de uma função: o conceito de **derivada**.

Neste capítulo o nosso objectivo é compreender melhor a relação estas estas três grandezas, posição, velocidade e aceleração, conceitos fundamentais à concretização do “programa newtoniano”.

2.2 Conceito de Derivada

Movimento é mudança, variação! Muitas vezes a questão que nos interessa, não é tanto “quanto variou” mas sim “quão depressa”.

- *Quão depressa está a crescer a população da Terra?*
- *Com que velocidade estou a gastar a minha mesada?*
- *Quão depressa está a aumentar de peso o bebé?*

A Matemática fornece-nos uma ferramenta fundamental para caracterizar o modo como varia uma função: o conceito de **derivada**. Com efeito, Newton é um dos co-inventores deste conceito (juntamente com Leibniz). Precisou dele para exprimir as suas leis de movimento e, como ainda não tinha sido introduzido na Matemática, desenvolveu este conceito de raiz.

Recordemos, brevemente, o que é a derivada de uma função.

O gráfico da figura 2.3, refere-se a uma função do tempo, $f(t)$. A sua variação no intervalo $[t_1, t_2]$ é

$$\Delta f = f(t_2) - f(t_1).$$

Olhando para o gráfico de f temos a “sensação” que a variação se torna mais rápida à medida que t aumenta. Como podemos exprimir esta “impressão” de modo mais preciso?

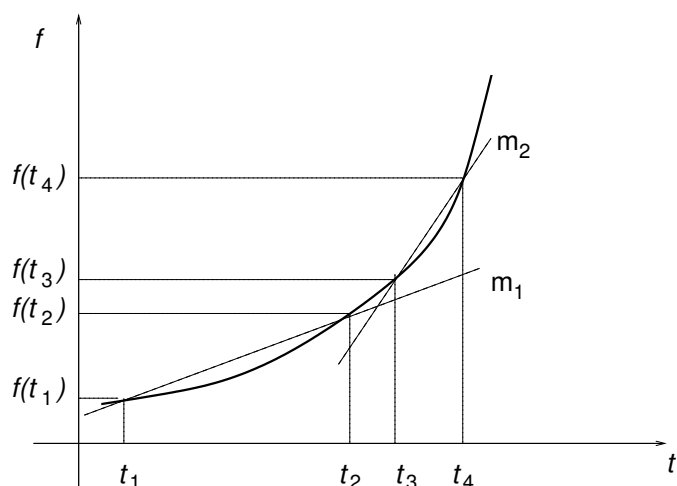


Figura 2.3: Interpretação geométrica de uma velocidade média.

Na figura 2.3, as variações de $f(t)$ nos dois intervalos considerados, $[t_1, t_2]$ e $[t_3, t_4]$, são semelhantes: mas no segundo intervalo a variação é mais rápida, como se vê pelos declives das rectas que passam pelos pontos do gráfico nos extremos destes intervalos. Estes declives são dados pela razão entre a variação de f e a variação de t em cada intervalo,

$$\text{taxa média de variação} = \frac{\Delta f}{\Delta t}.$$

Como estamos a dividir a variação de f pelo número de unidades de tempo em que ela ocorreu, Δt , o resultado é a variação média por unidade de tempo, ou taxa média de variação, no intervalo em causa.

No intervalo $[t_1, t_2]$,

$$\frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$$

e em $[t_3, t_4]$,

$$\frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{f(t_4) - f(t_3)}{t_4 - t_3}.$$

A taxa média permite-nos comparar a “rapidez de variação” em intervalos de tempo distintos.

Mesmo assim, o gráfico sugere que em t_1 a variação é mais lenta que em t_2 , por exemplo. O conceito de derivada permite a definição

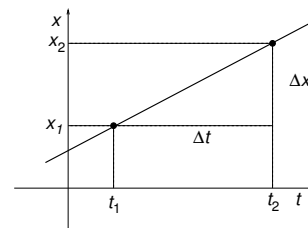


Figura 2.4: Se $x = mt + b$ o declive da recta, é $m = (x_2 - x_1)/(t_2 - t_1) = \Delta x/\Delta t$.

da taxa de variação de uma função num ponto. É óbvio que num intervalo de tempo nulo, $[t_1, t_1]$, quer a variação de f , quer a de t são nulas. Mas, se tomarmos o limite $t_2 \rightarrow t_1$, a recta que passa pelos pontos do gráfico de f em t_1 e t_2 tende para tangente à curva em t_1 . O respectivo declive é a **derivada** de f em t_1 :

$$\left. \frac{df}{dt} \right|_{t_1} = \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$$

Em resumo, se o declive da secante traduz a taxa média de variação num intervalo finito, o declive da tangente num dado ponto do gráfico de $f(t)$ reflecte a taxa de variação instantânea, a **derivada**, de f nesse ponto.

Exercício: vejamos qual é derivada da seguinte função:

$$f(t) = t^2.$$

Para isso usemos a definição de derivada num intervalo $[t, t + \Delta t]^1$:

$$\frac{df}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

Usando a definição de f :

$$\begin{aligned} f(t + \Delta t) &= (t + \Delta t)^2 = t^2 + 2t\Delta t + (\Delta t)^2 \\ f(t) &= t^2 \\ f(t + \Delta t) - f(t) &= 2t\Delta t + (\Delta t)^2. \end{aligned}$$

Dividindo por Δt

$$\frac{\Delta f}{\Delta t} = 2t + \Delta t.$$

Finalmente, tomado o limite de $\Delta t \rightarrow 0$,

$$\frac{df}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (2t + \Delta t) = 2t.$$

A derivada aumenta com o valor de t . Olhando para o gráfico de $f(t)$ vemos que a respectiva tangente tem um declive cada vez maior com o aumento de t .

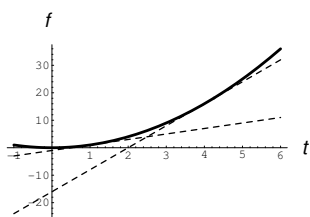


Figura 2.5: O declive da tangente aumenta com t .

O cálculo de derivadas

Não iremos precisar de calcular muitas derivadas. A tabela 2.1 resume o essencial do que precisamos de saber. Usando processos

Função $f(t)$	Derivada, df/dt
a	0
t	1
t^2	$2t$

Tabela 2.1: Tabela de derivadas: a é uma constante independente de t . Ver os gráficos destas funções e das suas derivadas na figura 2.6.

semelhantes ao exemplo anterior, não é difícil obter as entradas da segunda coluna.

Às derivadas desta tabela precisamos apenas juntar duas propriedades essenciais:

- A derivada da soma de duas funções $f(t) + g(t)$ é a soma das derivadas respectivas

$$\frac{d(f + g)}{dt} = \frac{df}{dt} + \frac{dg}{dt}.$$

- A derivada de $af(t)$, em que a é uma constante independente de t , é

$$\frac{d(af)}{dt} = a \frac{df}{dt} \quad a, \text{ constante.}$$

As derivadas da tabela 2.1 têm uma interpretação geométrica simples. Atentando nas funções representadas do lado esquerdo, na figura 2.6, não é difícil imaginar as tangentes para cada abcissa, e ver que o respectivo declive é dado pelas funções representadas à direita.

¹Em Matemática utiliza-se com frequência uma notação diferente para a derivada de uma função f , $f'(t)$. A notação usada neste texto, df/dt , recorda que a derivada é o **limite** de um cociente de duas variações. No entanto, não deve ser confundida com uma razão entre duas quantidades df e dt .

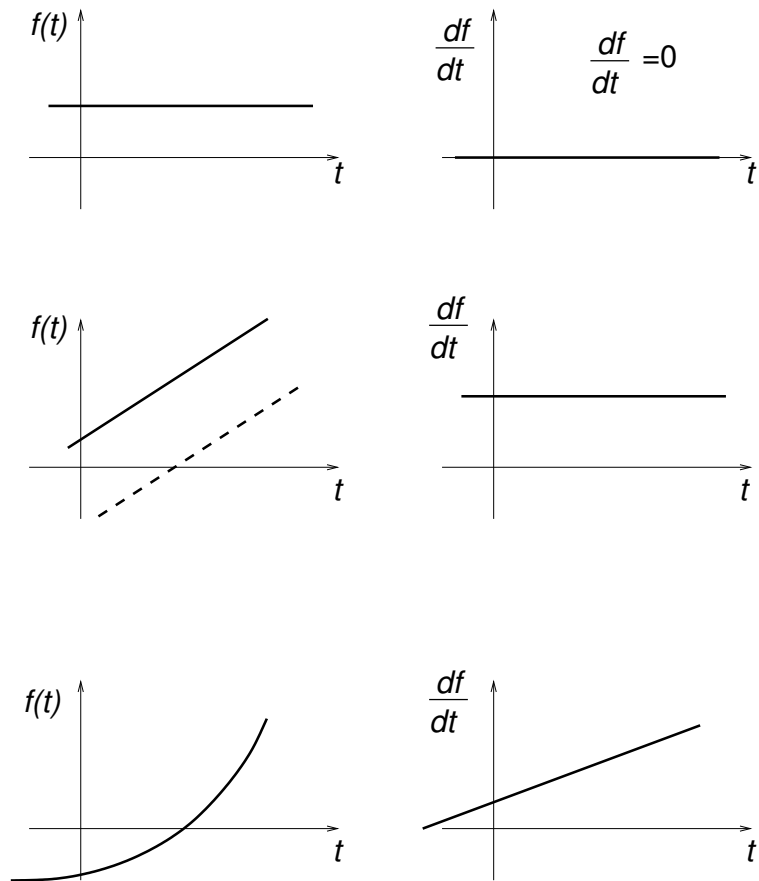


Figura 2.6: Algumas funções e suas derivadas. Note-se que adicionar uma constante (gráfico a tracejado, painel do centro à esquerda) não altera o valor do declive da tangente ao gráfico, isto é, da derivada.

$\mathcal{E}\mathcal{T}\mathcal{V}_1$

- a) Calcular pelo processo usado acima as derivadas das funções da tabela 2.1.
- b) Qual é a derivada de $f(t) = 3t^2$? Qual é a derivada de $f(t) = at^2$ em que a é qualquer constante?
- c) Qual é a derivada de $f(t) = mt+b$, com m e b constantes, independentes de t ?

2.3 Posição e referenciais

No 11º ano resolvemos vários problemas envolvendo movimentos de carros, bolas, flechas, etc. Frequentemente colocavam-se questões sobre a posição destes corpos (quão alto, quão longe, a que distância...). Se pensarmos bem, notaremos que as posições dos corpos eram sempre **relativas** a outros corpos.

Consideremos o seguinte exemplo de um problema do livro do 11º ano:

Uma jovem lança horizontalmente uma pedra, a uma altura de um metro da superfície de um lago, com uma velocidade de módulo 15 m s^{-1} .

- 2.1. Quanto tempo voa a pedra até bater a primeira vez na água?
- 2.2. A que distância (na horizontal) se dá o impacte na água?
[Ignorar a resistência do ar.]

A superfície do lago define um plano. A posição inicial da pedra, permite definir um eixo Oz perpendicular ao plano do lago. A

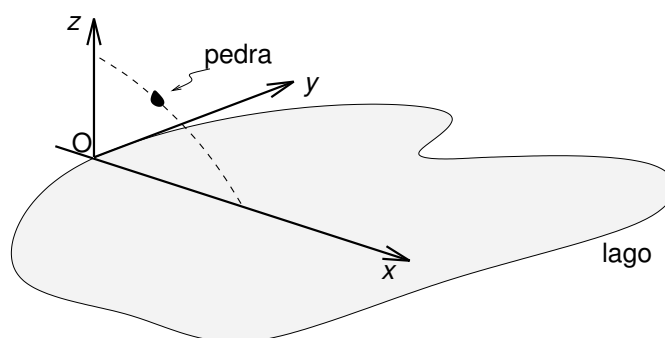


Figura 2.7: A escolha de um sistema de eixos, em geral, é determinada por um conjunto de corpos que mantêm posições relativas fixas durante o processo em estudo.

intersecção desse eixo com o plano do lago define a origem a que referimos a posição da pedra. Se escolhermos no plano do lago um eixo Ox com a direcção da velocidade inicial da pedra, teremos concretizado um sistema de eixos completo que nos permite referenciar a posição da pedra. A resposta à segunda alínea corresponde a saber a coordenada x do ponto de impacto ($z = 0$). Note-se como o conjunto de eixos foi definido em relação a um conjunto de referências fixas: a superfície do lago, a posição e a velocidade iniciais da pedra.

2.3.1 Vectores posição, velocidade e aceleração

Vector de Posição

O vector representado pelo segmento orientado² com início na origem do sistema de coordenadas e fim na posição do corpo, em cada instante t , é o **vector de posição**, $\vec{r}(t)$. Para um sistema de eixos $Oxyz$ podemos definir os vectores unitários segundo os eixos Ox , Oy e Oz , \hat{i} , \hat{j} e \hat{k} , respectivamente, e escrever

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}.$$

Na maior parte dos exemplos que vamos tratar, o movimento decorre num plano. Escolhendo os eixos de modo a que seja o plano Oxy , temos $z(t) = 0$ e podemos ignorar a terceira coordenada:

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j}.$$

²Recorde-se que segmentos orientados *equipolentes* (mesma direcção sentido e módulo) representam o mesmo **vector**.

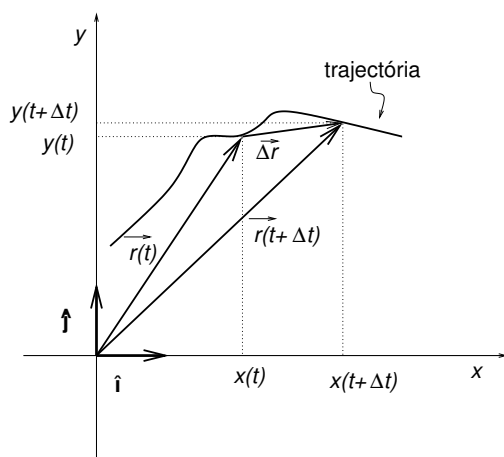


Figura 2.8: Vector de posição e coordenadas de uma partícula.

À medida que o corpo se move na trajectória, as suas coordenadas, $x(t)$ e $y(t)$, e o vector de posição variam no tempo.

Como vemos, caracterizar um movimento é um pouco mais complexo que tratar com uma única função do tempo $f(t)$: temos que lidar com o vector de posição $\vec{r}(t)$. Mas não muito mais! Definido um sistema de eixos, $\vec{r}(t)$ é determinado por duas funções: $x(t)$ e $y(t)$ (três para movimentos no espaço). Tal como fizemos para uma função, podemos definir a variação de $\vec{r}(t)$, a sua taxa média de variação e a sua derivada.

Vector velocidade

Entre dois instantes, t e $t + \Delta t$, a variação de $\vec{r}(t)$ é o **vector deslocamento**

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t).$$

As suas componentes³ são as variações de $x(t)$ e $y(t)$:

$$\begin{aligned} \Delta\vec{r} &= \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t) \\ &= x(t + \Delta t)\hat{i} + y(t + \Delta t)\hat{j} - x(t)\hat{i} - y(t)\hat{j} \\ &= (x(t + \Delta t) - x(t))\hat{i} + (y(t + \Delta t) - y(t))\hat{j} \\ &= \Delta x\hat{i} + \Delta y\hat{j}. \end{aligned}$$

³Quando escrevemos $\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j}$, a_x e a_y são as **componentes** de \vec{a} . Os vectores $a_x\hat{i}$ e $a_y\hat{j}$ são os **componentes vectoriais** de \vec{a} . Esta notação difere da que se usa em Matemática mas é quase universal em textos de Física.

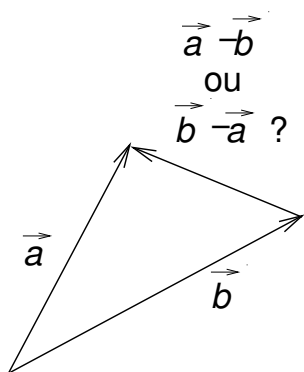


Figura 2.9: Qual é o vector $\vec{a} - \vec{b}$?

Dica: O vector $\vec{a} - \vec{b}$ é representado por um segmento orientado do extremo de \vec{a} para \vec{b} ou ao contrário?

Unindo o extremo de \vec{b} ao de \vec{a} (representados por segmentos com a mesma origem) obtemos o vector que somado a \vec{b} dá \vec{a} , isto é $(\vec{a} - \vec{b})$. Não há pois que enganar: $\vec{a} - \vec{b}$ liga o extremo de \vec{b} a \vec{a} .

O equivalente à taxa média de variação de f é o vector **velocidade média**, o deslocamento por unidade de tempo,

$$\vec{v}_m = \frac{\vec{\Delta r}}{\Delta t}.$$

Tem a mesma direcção e sentido que o vector deslocamento (para $\Delta t > 0$). As suas componentes obtêm-se usando a definição de produto de um escalar $(1/\Delta t)$ por um vector $(\vec{\Delta r})$

$$\begin{aligned} \vec{v}_m &= \frac{1}{\Delta t}(\Delta x \hat{\mathbf{i}} + \Delta y \hat{\mathbf{j}}) \\ &= \frac{\Delta x}{\Delta t} \hat{\mathbf{i}} + \frac{\Delta y}{\Delta t} \hat{\mathbf{j}}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\vec{v}_m = \left(\frac{\Delta x}{\Delta t}, \frac{\Delta y}{\Delta t} \right).$$

As componentes de \vec{v}_m são as taxas médias de variação das coordenadas $x(t)$ e $y(t)$.

Podemos agora definir o vector velocidade instantânea como sendo o limite do vector velocidade média quando o intervalo de tempo $\Delta t \rightarrow 0$, ou seja, a derivada temporal de $\vec{r}(t)$. Mais precisamente,

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{\Delta r}}{\Delta t}.$$

Mas o que é a derivada de um vector?

Sabemos o que é a razão $\vec{\Delta r}/\Delta t$:

$$\frac{\vec{\Delta r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \hat{\mathbf{i}} + \frac{\Delta y}{\Delta t} \hat{\mathbf{j}}.$$

O que acontece a esta expressão se tomarmos o limite $\Delta t \rightarrow 0$?
Os versores $\hat{\mathbf{i}}$ e $\hat{\mathbf{j}}$ estão fixos, logo

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} &= \left(\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \right) \hat{\mathbf{i}} + \left(\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} \right) \hat{\mathbf{j}} \\ &= \frac{dx}{dt} \hat{\mathbf{i}} + \frac{dy}{dt} \hat{\mathbf{j}}\end{aligned}$$

As componentes da velocidade instantânea são as derivadas em ordem ao tempo das coordenadas de posição respectivas:

$$\begin{aligned}v_x(t) &= \frac{dx}{dt} \\ v_y(t) &= \frac{dy}{dt}.\end{aligned}$$

Vector aceleração

O vector velocidade instantânea, $\vec{v}(t)$, tal como o vector de posição, $\vec{r}(t)$, varia no tempo. Podemos descrever a sua variação exactamente do mesmo modo que fizemos para $\vec{r}(t)$.

A taxa média de variação da velocidade num intervalo $[t, t + \Delta t]$ é a aceleração média

$$\vec{a}_m = \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}.$$

A aceleração instantânea é a derivada do vector velocidade,

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}.$$

Se usarmos um sistema de coordenadas Oxy , estas equações tomam a forma

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \hat{\mathbf{i}} + \frac{\Delta v_y}{\Delta t} \hat{\mathbf{j}}$$

e

$$\vec{a}(t) = \frac{dv_x}{dt} \hat{\mathbf{i}} + \frac{dv_y}{dt} \hat{\mathbf{j}}.$$

As componentes da aceleração a_x, a_y são as derivadas das componentes da velocidade, v_x e v_y :

$$\begin{aligned}a_x(t) &= \frac{dv_x}{dt} \\ a_y(t) &= \frac{dv_y}{dt}.\end{aligned}$$

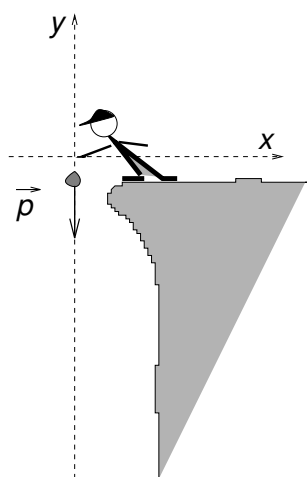


Figura 2.10: Queda sob acção do peso.

$\mathcal{E}\mathcal{T}\mathcal{V}_2$: As coordenadas de uma partícula são dadas pelas seguintes funções do tempo (coordenadas em metros e tempo em segundos):

$$\begin{aligned}x(t) &= 3t \\y(t) &= 2t - 5t^2.\end{aligned}$$

- Calcular o vector velocidade no instante $t = 0$.
- Calcular a aceleração e mostrar que não depende do tempo.

2.4 Movimento uniformemente acelerado.

Para ilustrar o “programa” de Newton vamos rever um movimento estudado no 11^o ano, o da queda livre, e formulá-lo nesta linguagem. Ignoramos a resistência do ar: a única força exercida no corpo é o seu peso, mg .

Escolher os eixos: já que a aceleração é na direcção vertical, parece lógico fazer coincidir essa direcção com um eixo coordenado. Escolhemos assim um sistema Oxy em Ox é um eixo horizontal e Oy vertical.

Calcular a aceleração: com esta escolha de eixos, a força aplicada sobre o corpo, é:

$$\vec{f} = \vec{p} = 0\hat{i} - mg\hat{j} = -mg\hat{j}.$$

Pela segunda lei de Newton

$$\vec{a} = \frac{\vec{f}}{m}$$

ou

$$\vec{a} = 0\hat{i} - g\hat{j}.$$

Por outras palavras,

$$\begin{aligned}a_x &= 0 \\a_y &= -g.\end{aligned}$$

Calcular a velocidade: comecemos pela componente v_x . Sabemos que a_x , a sua derivada, é nula.

$$a_x(t) = \frac{dv_x}{dt} = 0.$$

O declive da tangente ao gráfico de $v_x(t)$ é nulo **para todas as abcissas** t . O gráfico de $v_x(t)$ só pode ser uma recta horizontal! Isto é, v_x é uma constante. Com efeito, se consultarmos a tabela de derivadas da página 39 vemos que uma função constante tem derivada nula. Assim:

$$v_x = v_{0x}, \quad (\text{constante}).$$

Passemos a a_y , que é constante:

$$a_y(t) = \frac{dv_y}{dt} = -g.$$

O declive da tangente ao gráfico de $v_y(t)$ é constante, mas não nulo. Um gráfico de declive constante é uma recta,

$$v_y(t) = mt + b$$

A derivada desta função é m , (ver \mathcal{EVT}_1 na página 41), logo $m = -g$. A constante b é o valor de v_y para $t = 0$: $v_y(0) \equiv v_{y0}$. Assim,

$$v_y(t) = -gt + v_{0y}.$$

Se o corpo tiver sido largado do repouso, a velocidade inicial é nula, $\vec{v}(0) = (v_{0x}, v_{0y}) = (0, 0)$ e

$$\begin{aligned} v_x(t) &= 0 \\ v_y(t) &= -gt. \end{aligned}$$

Calcular a posição: que $x(t)$ e $y(t)$ correspondem a estes valores de velocidade?

Se $v_x = 0$, $x(t)$ é constante:

$$x(t) = x_0.$$

Para calcular $y(t)$ temos que saber que função tem derivada

$$\frac{dy}{dt} = v_y(t) = -gt.$$

Já vimos atrás que at^2 tem derivada $2at$. Ou seja, pondo $a = -g/2$,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{-gt^2}{2} \right) = -gt.$$

Parece, então que

$$y(t) = -\frac{g}{2}t^2.$$

Na realidade, temos que levar em conta que, se juntarmos uma constante a esta função, não alteramos a respectiva derivada:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{-gt^2}{2} + b \right) = -gt$$

Assim,

$$y = -\frac{g}{2}t^2 + y_0$$

Obtivemos, finalmente, as equações paramétricas para a queda:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 \\ y(t) &= -\frac{g}{2}t^2 + y_0 \end{aligned}$$

Os valores de x_0 e y_0 dependem da escolha de eixos. Podemos, por exemplo, escolher a posição inicial como sendo a origem do sistema de eixos, caso em que $x_0 = y_0 = 0$. Para $t > 0$ o corpo ocupa posições no semi-eixo negativo Oy . Nesse caso o vector de posição seria

$$\vec{r}(t) = -\frac{g}{2}t^2\hat{j}.$$

▷ Actividade 2.1

A trajectória é rectilínea sobre o eixo Oy .

Na Actividade 2.1 propõe-se um conjunto de exercícios baseados neste exemplo, destinados a explorar a questão do alcance do movimento de um projectil.

2.5 Velocidade, aceleração e geometria

O movimento com força constante, em módulo, direcção e sentido, é, talvez, o mais simples que podemos considerar.

Na secção anterior vimos um exemplo em que um movimento de força constante era rectilíneo. Se deixarmos cair um objecto do repouso o seu movimento tem a direcção vertical; se o projectarmos na horizontal, fica sujeito à mesma força (depois de o largarmos) e contudo a sua trajectória é curvilínea.

Para compreendermos melhor a relação ente velocidade e aceleração (uma parte fundamental do programa newtoniano) temos que olhar de novo para a definição de aceleração:

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{a}_m$$

Que quer dizer a existência deste limite? Imaginemos que considerávamos uma sequência de intervalos Δt cada vez mais pequenos, por exemplo, 100, 10, 1, $10^{-1}, \dots$. A existência do limite significa que as acelerações médias correspondentes deverão aproximar-se de $\vec{a}(t)$, eventualmente. Para intervalos de tempo suficientemente pequenos deveremos ter

$$\vec{a}_m \approx \vec{a}(t).$$

ou seja

$$\Delta \vec{v} = \vec{a}(t)\Delta t, \quad (\text{para } \Delta t \text{ muito pequeno})$$

Para um intervalo de tempo Δt muito pequeno (infinitesimal) a variação de velocidade, $\Delta \vec{v}$, (igualmente pequena em módulo) tem a direcção e sentido da aceleração instantânea. Esta é uma ideia muito simples, mas muito poderosa para percebermos o significado de uma aceleração.

O mesmo raciocínio permite-nos escrever

$$\Delta \vec{r} = \vec{v}(t)\Delta t \quad (\text{para } \Delta t \text{ muito pequeno})$$

No limite de Δt muito pequeno, a direcção e sentido do vector deslocamento são os da velocidade instantânea: quando $\Delta t \rightarrow 0$, a direcção do deslocamento $\Delta \vec{r}$ tende para a tangente à trajectória.

2.5.1 Movimento rectilíneo

Suponhamos que a direcção da velocidade e aceleração coincidem num dado instante, t . Como é a velocidade um pouco mais tarde, em $t + \Delta t$?

O vector $\Delta \vec{v} = \vec{a}(t)\Delta t$, que temos que somar a $\vec{v}(t)$, tem a mesma direcção $\vec{v}(t)$. Se $\vec{a}(t)$ e $\vec{v}(t)$ tiverem o mesmo sentido, o mesmo acontece com $\vec{v}(t)$ e $\Delta \vec{v}$ e o módulo da velocidade aumenta. Se $\vec{a}(t)$ e $\vec{v}(t)$ tiverem sentidos opostos somamos a $\vec{v}(t)$ um pequeno vector de sentido oposto e o módulo de $\vec{v}(t)$ diminui. A direcção de \vec{v} não muda.

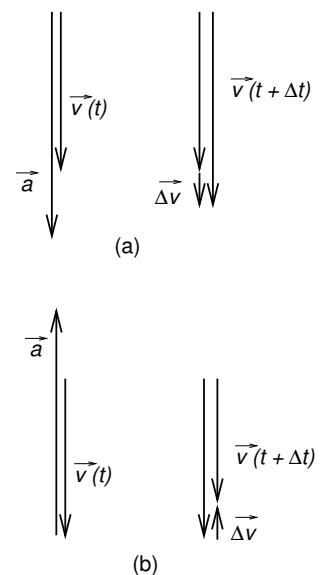


Figura 2.11: Se a aceleração for paralela à velocidade, a direcção desta não varia.

Em conclusão, se a aceleração (vector) for constante e a velocidade (vector) tiver num dado instante a direcção de \vec{a} , a direcção da velocidade mantêm-se constante e o movimento é rectilíneo.

2.5.2 Movimento curvilíneo

Se um lançador de peso deixar simplesmente cair a esfera que tem na mão, não terá grande futuro. O efeito de lançamento resulta numa velocidade inicial que faz um ângulo superior a 90° com a direcção da aceleração (ver figura 2.12).

Sabemos que enquanto a esfera sobe a sua energia potencial gravítica $E_P = mgy$ aumenta. Logo, a sua energia cinética, $E_c = mv^2/2$, diminui. Quando a esfera desce passa-se o contrário. Estes factos podem compreender-se tendo em conta as direcções da velocidade e aceleração.

Para um intervalo de tempo pequeno, a direcção de $\vec{\Delta v}$ é a da aceleração, $-\hat{j}$. Na ascensão da esfera o ângulo entre $\vec{v}(t)$ e $\vec{\Delta v}$ é superior a 90° : o módulo da velocidade diminui (fig. 2.12a). Na fase descendente da trajectória o ângulo entre $\vec{v}(t)$ e $\vec{\Delta v}$ é agudo: o módulo da velocidade aumenta (fig. 2.12c).

Em qualquer caso, ao somar $\vec{\Delta v}$, a direcção do vector velocidade, **roda para a direcção da aceleração**. Dizer que a velocidade roda, isto é **que a direcção tangente à trajectória roda**, é o mesmo que dizer que a trajectória é curvilínea.

A aceleração tem, então, dois efeitos no movimento: a variação do módulo da velocidade (pode ser positiva ou negativa) e a variação da direcção de velocidade, quando \vec{a} e \vec{v} não são paralelas.

2.5.3 Acelerações tangencial e normal

Podemos separar estes dois efeitos decompondo o vector $\vec{\Delta v}$ em duas componentes: uma paralela e outra perpendicular a $\vec{v}(t)$:

$$\vec{\Delta v} = \vec{\Delta v}_{\parallel} + \vec{\Delta v}_{\perp}.$$

Então

$$\vec{v}(t + \Delta t) = \vec{v}(t) + \vec{\Delta v}_{\parallel} + \vec{\Delta v}_{\perp}.$$

A adição de $\vec{\Delta v}_{\parallel}$ a \vec{v} apenas altera o módulo de \vec{v} . Repare-se que $\vec{\Delta v}_{\parallel}$ tem o sentido de \vec{v} se o ângulo entre \vec{v} e $\vec{\Delta v}$ for agudo ($< 90^\circ$); tem o sentido oposto se o ângulo for obtuso ($> 90^\circ$). No primeiro caso o módulo da velocidade aumenta e no segundo diminui.

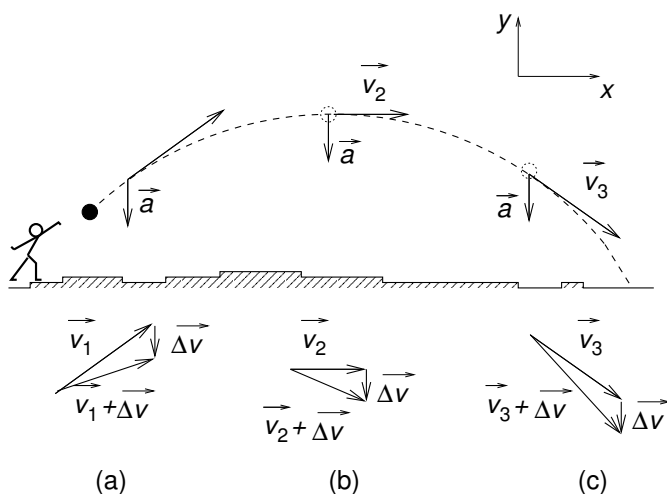


Figura 2.12: A aceleração faz variar o módulo e a direcção da velocidade.

A adição de $\Delta \vec{v}_\perp$ a \vec{v} roda a direcção da velocidade, sem alterar o respectivo módulo (recorde-se que o módulo de $\Delta \vec{v} = \vec{a}\Delta t$ é muito pequeno, muito menor que o módulo de \vec{v} , para intervalos de tempo suficientemente pequenos).

Podemos fazer a mesma decomposição da aceleração:

$$\begin{aligned}\vec{\Delta v}_\parallel &= \vec{a}_\parallel \Delta t \\ \vec{\Delta v}_\perp &= \vec{a}_\perp \Delta t.\end{aligned}$$

A componente vectorial da aceleração na direcção da velocidade, \vec{a}_\parallel , **aceleração tangencial**, é responsável pela variação do módulo da mesma; a rotação da direcção da velocidade, isto é a curvatura da trajectória, é devida à componente vectorial da aceleração perpendicular a \vec{v} , \vec{a}_\perp , **aceleração normal**.

Aceleração tangencial

Quanto maior for o módulo de \vec{a}_\parallel , maior é $\Delta \vec{v}$, para o mesmo Δt , e mais rápida é a variação do módulo de \vec{v} . Não é pois surpreendente que se verifique que⁴

$$\vec{a}_\parallel = \frac{dv}{dt} \hat{e}_\parallel, \quad (2.1)$$

⁴A expressões que se seguem para os módulos de \vec{a}_\parallel e \vec{a}_\perp não serão deduzidas. Espera-se que a análise geométrica aqui apresentada as torne, pelo menos, plausíveis.

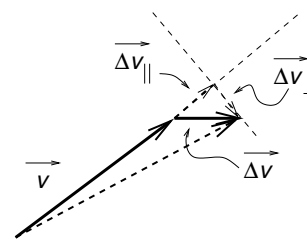


Figura 2.13: A componente paralela $\Delta \vec{v}_\parallel$ faz variar o módulo de \vec{v} ; a componente $\Delta \vec{v}_\perp$, roda a direcção de \vec{v}

em que o versor \hat{e}_{\parallel} tem a direcção e sentido da velocidade. Se $dv/dt > 0$, módulo da velocidade crescente, \vec{a}_{\parallel} tem o mesmo sentido que \vec{v} ; se $dv/dt < 0$, o sentido de \vec{a}_{\parallel} é oposto ao de \vec{v} .

Aceleração normal

Por outro lado a aceleração normal, \vec{a}_{\perp} será tanto maior em módulo quanto mais rapidamente variar a direcção do vector velocidade. O resultado seguinte generaliza o que encontramos no 11º ano para o movimento circular uniforme:

$$\vec{a}_{\perp} = \frac{v^2}{R} \hat{e}_{\perp} \quad (2.2)$$

O versor \hat{e}_{\perp} é perpendicular à velocidade e com o sentido de rotação da mesma, isto é, com o sentido de encurvamento da trajectória. A grandeza R é o raio de curvatura da trajectória. Se imaginarmos um circunferência ajustada o “melhor possível” a uma pequena secção da curva, o raio de curvatura nesse ponto é o raio dessa circunferência. Naturalmente, para uma circunferência o raio de curvatura é o próprio raio da circunferência. Intuitivamente, uma trajectória mais encurvada corresponde a um raio de curvatura menor. Uma linha recta, por exemplo, tem raio de curvatura infinito.

Quanto mais curva for a trajectória (menor R) e mais rapidamente for percorrida (maior v) mais rápida será a variação da direcção da velocidade. É isso que traduz a equação 2.2.

Duas notas finais:

- i. Voltando ao lançador do peso é importante salientar que embora a aceleração seja constante, as suas componentes normal e tangencial variam. A direcção do vector velocidade roda para a direcção fixa de \vec{a} : o ângulo entre \vec{v} e \vec{a} vai sempre diminuindo. Por isso, as componentes \vec{a}_{\perp} e a_{\parallel} variam: a componente normal aumenta até ao ponto de altura máxima e depois diminui sempre à medida que as direcções de \vec{a} e de \vec{v} se aproximam.
- ii. O resultado da equação 2.2 generaliza o resultado que obtivemos para a aceleração de um movimento circular uniforme. Nesse caso o módulo da velocidade não varia e $\vec{a}_{\parallel} = 0$. A

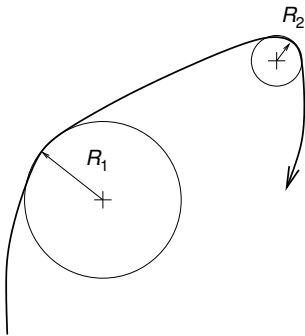


Figura 2.14: Numa secção suficientemente pequena podemos aproximar uma trajectória por uma circunferência: o raio dessa circunferência é o raio de curvatura nesse ponto.

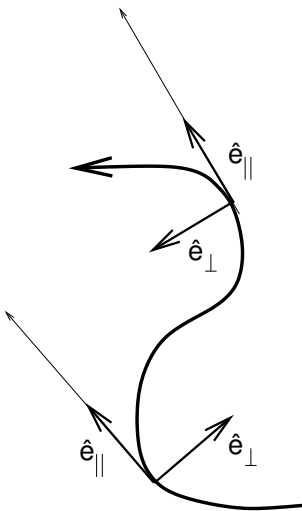


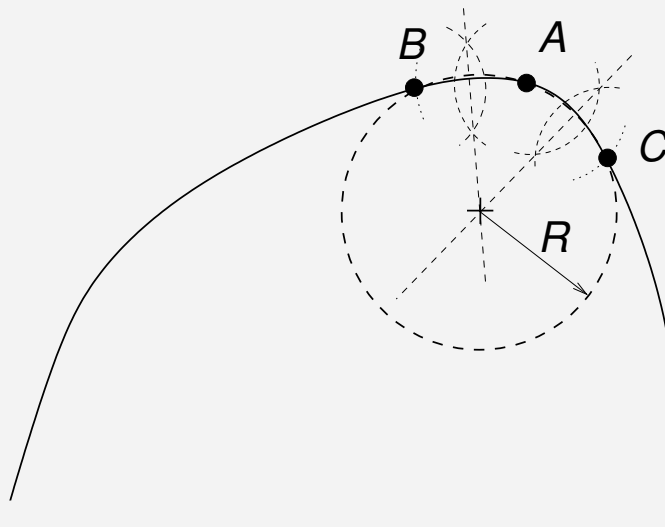
Figura 2.15: Versores da aceleração tangencial e normal.

■ Construção geométrica para determinar R ■

A seguinte construção geométrica dá uma aproximação rápida ao raio de curvatura.

Sobre uma curva arbitrária (desenhada à mão em papel milimétrico, por exemplo) marquemos o ponto A onde queremos medir o raio de curvatura. Com o compasso marquemos na curva mais dois pontos equidistantes destes, B e C , não muito afastados. Com a construção habitual de régua e compasso, tracemos as perpendiculares aos pontos médios dos segmentos $[AB]$ e $[AC]$. Estas duas rectas encontram-se num ponto equidistante de A, B e C . Porquê?

Então, podemos traçar uma circunferência com centro nesse ponto que passe nos três pontos, A, B e C . Quando estes três pontos são próximos essa circunferência “ajusta-se” muito bem à curva original e o seu raio é aproximadamente o raio de curvatura em A .



Caixa 2.1: Construção geométrica para estimar o raio de curvatura.

aceleração reduz-se à componente normal, que designámos por aceleração centrípeta, e que tem o módulo

$$\frac{v^2}{R}.$$

No caso de uma trajectória circular o raio de curvatura é o raio da circunferência.

2.6 Respostas a \mathcal{ETVS}

\mathcal{ETV}_1 (a)

i) $f(t) = a$ com a independente de t :

$$\begin{aligned} f(t + \Delta t) &= a \\ f(t) &= a \end{aligned}$$

e $\Delta f = 0$, qualquer que seja t ou Δt . Logo

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} 0 = 0.$$

ii) $f(t) = t$,

$$\begin{aligned} f(t + \Delta t) &= (t + \Delta t) \\ f(t) &= t \\ f(t + \Delta t) - f(t) &= \Delta t \end{aligned}$$

e

$$\frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{\Delta t}{\Delta t} = 1$$

O limite, quando $\Delta t \rightarrow 0$, é também, 1.

iii) Para $f(t) = t^2$, a derivada já foi calculada no texto. (página 38). Aplicando a segunda regra da página 29, obtemos

$$\frac{d}{dt}(at^2) = a \frac{d}{dt}(t^2) = 2at.$$

(b) Neste caso

$$f(t + \Delta t) - f(t) = m(t + \Delta t) + b - (mt + b) = m\Delta t$$

Logo,

$$\frac{\Delta f}{\Delta t} = m$$

O membro direito da equação não depende de Δt , o que significa que o limite quando $\Delta t \rightarrow 0$ é m . Alternativamente, podíamos ter notado que $f(t)$ é a soma de duas funções, mt e b . Este resultado podia ter sido antecipado: o gráfico de $f(t)$ é uma linha recta de declive m ; a tangente a uma linha recta é ela própria!

$\mathcal{E}\mathcal{T}\mathcal{V}_2$

a)

$$\begin{aligned}v_x(t) &= \frac{d}{dt}(3t) = 3\frac{d}{dt}(t) = 3; \\v_y(t) &= \frac{dy}{dt}(2t - 5t^2) = 2\frac{d}{dt}(t) - 5\frac{d}{dt}(t^2) = \\&= 2 - 10t\end{aligned}$$

$$v_x(0) = 3 \text{ m s}^{-1}; v_y(0) = 2 \text{ m s}^{-1}; \vec{v}(0) = 3\hat{i} + 2\hat{j}.$$

b)

$$\begin{aligned}a_x(t) &= \frac{d}{dt}(3) = 0. \\a_y(t) &= \frac{d}{dt}(2 - 10t) = 0 - 10.\end{aligned}$$

$$\vec{a} = (0, -10) \text{ m s}^{-2}.$$

2.7 Actividades, questões e problemas

2.7.1 Actividades

2.1. Alcance de um projectil

Ver ficha de actividade A32.

2.7.2 Questões

2.1. O movimento representado a cheio no gráfico de $x(t)$ da figura ao lado tem aceleração constante entre $t = 60 \text{ s}$ e $t = 80 \text{ s}$.

- Represente da forma mais fiel possível os gráficos de velocidade e aceleração, $v_x(t)$ e $a_x(t)$, correspondentes ao gráfico de $x(t)$ (a cheio).
- Será possível que o movimento representado a tracejado tenha aceleração constante no intervalo entre $t = 60 \text{ s}$ e $t = 80 \text{ s}$? (A velocidade em $t = 80 \text{ s}$ é a mesma que no gráfico a cheio).

2.2. O gráfico da figura 2.17 representa a velocidade de um automóvel que se desloca em linha recta.

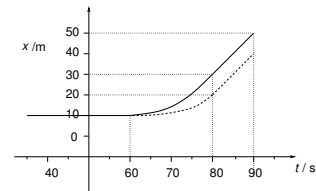


Figura 2.16: Quais são a velocidade e aceleração?

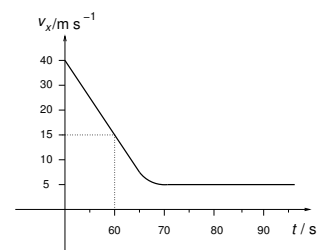


Figura 2.17: Qual é a aceleração?

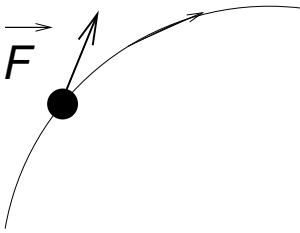


Figura 2.18: O que há de errado com esta figura?

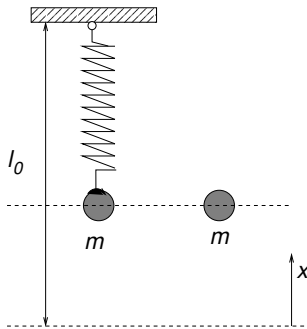


Figura 2.19: Qual cai mais depressa?

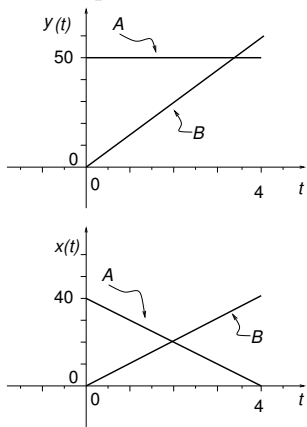


Figura 2.20: Quais são as trajectórias?

t/s	$v/m\ s^{-1}$
0	1,00
1	0,37
2	0,14
3	0,05
4	0,02

Tabela 2.2: Tabela de velocidades.

- Identificar no gráfico o período em que o condutor carrega no travão.
- Representar, o mais fielmente possível, um gráfico da aceleração $a_x(t)$ do automóvel.
- Qual é a resultante das forças que actuam no veículo após o instante $t = 70\ s$?

2.3. Um movimento curvilíneo pode ter aceleração nula? Porquê?

2.4. Se \vec{F} é a força sobre a esfera da figura 2.18, o que há de errado com a figura?

2.5. As duas esferas da figura 2.19 são idênticas. Uma delas está ligada a uma mola cujo comprimento sem qualquer carga é l_0 . As duas esferas são largadas da mesma altura ao mesmo tempo.

- Qual das esferas passa mais depressa à altura correspondente ao comprimento em repouso da mola? Porquê?
- A força exercida pela mola é proporcional à diferença entre o comprimento da mola e o seu comprimento em repouso

$$F_x = k(l - l_0) = -kx.$$

A massa presa à mola tem um movimento uniformemente acelerado? Justifique.

2.6. Os gráficos da figura 2.20 representam as coordenadas $x(t)$ e $y(t)$ de duas partículas que se movem no plano. As escalas de ordenadas e de abcissas são idênticas nos dois gráficos.

- Represente as trajectórias das partículas no plano e faça uma descrição do movimento registado nestes gráficos. As partículas colidem?

2.7. A tabela 2.2 refere-se a um movimento rectilíneo. Mostrar que **não** se trata de um movimento uniformemente retardado, por dois processos:

- Cálculo da aceleração média em cada intervalo.
- Representação gráfica de v em função de t .

2.8. Fazer um gráfico esquemático da componente normal da aceleração, $a_{\perp} = v^2/R$ para o movimento da figura 2.12 da página 51.

- (a) Em que instante é máximo o valor de a_{\perp} ? Quanto vale?
 (b) Como varia, qualitativamente, o raio de curvatura ao longo do movimento? Em que instante é mínimo?

Nota: um raio de curvatura **menor** significa **maior curvatura** da trajectória. Por vezes isto dá origem a alguma confusão.

2.9. No acelerador de partículas do CERN os protões de um feixe têm um movimento circular (raio constante), com uma velocidade cujo módulo aumenta no tempo (por isso se chama acelerador). Qual ou quais das seguintes conclusões decorrem desta informação?

- (a) O módulo da aceleração dos protões aumenta no tempo.
 (b) A componente vectorial tangencial da aceleração, a_{\parallel} , tem o sentido da velocidade dos protões.
 (c) A componente normal da aceleração aumenta em módulo no tempo.
 (d) A componente tangencial da aceleração aumenta em módulo no tempo.

2.7.3 Problemas

2.1. Uma esfera é largada do repouso a 10m de altura.

- (a) Quanto tempo demora a atingir o solo?
 (b) Se tiver uma velocidade inicial

$$\vec{v} = -0,5\hat{j} \quad (\text{m s}^{-1})$$

em que \hat{j} é um versor de direcção vertical e sentido ascendente, quanto tempo demora a atingir o solo?

- (c) Se a velocidade inicial for simétrica da anterior,

$$\vec{v} = 0,5\hat{j} \quad (\text{m s}^{-1})$$

quanto tempo demora a passar de novo na posição inicial? Quanto tempo demora, depois de passar de novo na posição inicial, a chegar ao solo?

2.2. Uma partícula move-se com velocidade

$$\vec{v}(t) = 2t\hat{i} + 4\hat{j}. \quad (\text{m s}^{-1})$$

- (a) A partícula passa no ponto de coordenadas $(6, 6)$ (m) no instante $t = 2$ s. Determinar as coordenadas $x(t)$ e $y(t)$.
- (b) Calcular o módulo do vector aceleração.

2.3. O vector de posição de uma partícula é dado por

$$\vec{r}(t) = 2t(\hat{i} + \hat{j}) \text{ (m)}$$

- (a) A trajectória é rectilínea?
- (b) Que ângulo faz a trajectória com o eixo Ox , na origem?
- (c) Qual é a distância da partícula à origem no instante $t = 20$ s?
- (d) Determinar o vector aceleração para este movimento.

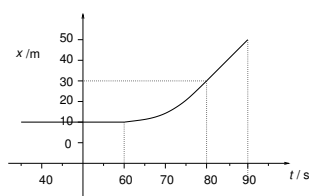


Figura 2.21: Quais são a velocidade e aceleração?

2.4. Para o gráfico da figura 2.21, determine a expressão de $x(t)$. Calcule a velocidade e a aceleração correspondentes, $v_x(t)$ e $a_x(t)$. Entre $t = 60$ s e $t = 80$ s o movimento é uniformemente acelerado.

- 2.5. Um carro de massa 250 g, inicialmente em repouso, é actuado por um força constante de 5 N durante meio segundo, após o que se desloca livre de qualquer força. Usando um sistema de eixos com origem na posição inicial do carro, determinar os vectores de posição e de velocidade do carro, em $t = 2$ s.
- 2.6. Em concursos de “homens fortes” há uma prova que consiste em puxar um camião de 20 toneladas, partindo do repouso. Cada concorrente tem que realizar um percurso de 30 m.

- (a) Um concorrente que termine a prova em 50 s, que força exerce sobre o camião? (Ignorar forças de atrito).
- (b) Qual é a velocidade do camião ao completar os 30 m da prova da alínea (a)?

2.7. Quando um automóvel inicia uma travagem fica sujeito a uma força horizontal

$$\vec{F} = -\mu p \hat{i} \quad (2.3)$$

em que \hat{i} é o versor com a direcção e sentido da velocidade, μ é o coeficiente de atrito dos pneus com a estrada e p o peso do veículo.

- (a) Explique a razão de ser do sinal menos na eq. 2.3.

- (b) Usando $\mu = 0,6$, calcule o tempo que demora a imobilizar-se um automóvel com velocidade inicial de 90 km h^{-1} .
- (c) Determine a equação paramétrica de $x(t)$ e calcule a distância de travagem.

2.8. Considere ainda a situação do problema anterior.

- (a) Explique por que razão a massa do automóvel não tem que ser considerada para determinar a distância de travagem.
- (b) Num caso de atropelamento a polícia mediu marcas de travagem com uma extensão de 20 m , numa zona em que a velocidade máxima era de 50 km h^{-1} . O condutor afirma que circulava dentro dos limites de velocidade. Admitindo que pneus em boas condições e piso seco têm $\mu = 0,6$, será de acreditar na afirmação do condutor?

2.9. Uma demonstração bem conhecida da independência dos movimentos vertical e horizontal de projecteis consiste em projectar horizontalmente uma esfera exactamente no instante em que uma segunda esfera cai na vertical, da mesma altura, um pouco mais à frente: as duas esferas colidem no ar.

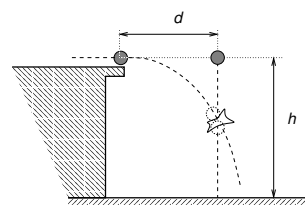


Figura 2.22: Se largadas em simultâneo as duas esferas podem colidir em pleno ar.

- (a) Escrever as equações paramétricas do movimento, para as coordenadas $x(t)$ e $y(t)$ das duas esferas, usando um sistema de eixos apropriado.
- (b) Para $h = 1,5 \text{ m}$, $d = 1,0 \text{ m}$ e velocidade inicial da primeira esfera $v_x(0) = 2 \text{ m s}^{-1}$, as esferas colidem no ar?
- (c) Se a segunda esfera for largada com um pequeno atraso de $0,1 \text{ s}$ e cada esfera tiver um diâmetro de 2 cm , haverá colisão?

Nota: supor que, para haver colisão, quando a primeira esfera cruzar a trajectória da segunda, a distância entre os respectivos centros tem que ser inferior ao diâmetro das esferas.

2.10. O automóvel da figura está a deslocar-se com velocidade de 140 km h^{-1} e o comboio a 100 km h^{-1} .

- (a) Escolher os eixos apropriadamente e obter as seguintes equações paramétricas (distâncias em metros e tempo em segundos):

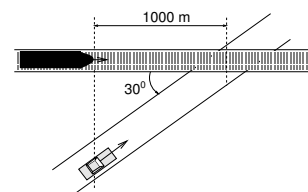


Figura 2.23: Passará a tempo?

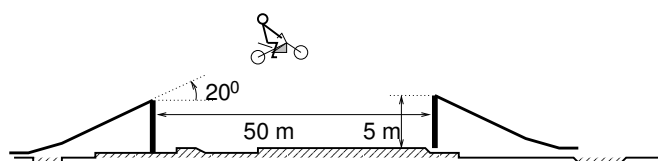


Figura 2.25: Salto de moto.

$$\text{comboio} \begin{cases} x(t) = 27,8t \\ y(t) = 577 \end{cases}$$

$$\text{carro} \begin{cases} x(t) = 33,7t \\ y(t) = 19,4t \end{cases}$$

- (b) Representar no mesmo gráfico as coordenadas y do carro e do comboio. Identificar no gráfico o instante em que o automóvel cruza a linha de comboio e determiná-lo.
- (c) Representar no mesmo gráfico as coordenadas x do carro e do comboio. Verificar se o carro atravessou a linha a tempo de evitar ser colhido pelo comboio.

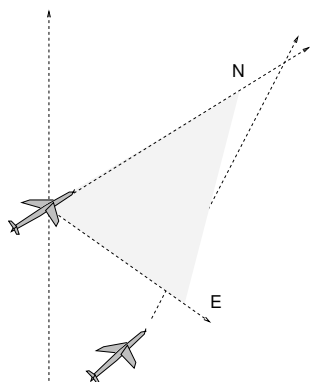


Figura 2.24: Haverá perigo de colisão?

- 2.11. Um avião comercial move-se na direcção Norte, a 720 km h^{-1} , a um altitude fixa de 9000 m . Um segundo avião encontra-se 10 km para Este, a 6000 m de altitude, com uma velocidade na direcção Noroeste de 900 km h^{-1} ; além disso sobe a uma velocidade de 600 m por minuto. Sugere-se o recurso a uma calculadora gráfica para resolver esta questão.
- (a) Haverá perigo de colisão?
- (b) Se sim, quanto tempo têm os pilotos para reagir e corrigir as rotas?
- 2.12. O motociclista da figura 2.25 tem que transpor os 50 m de distância entre as duas rampas da figura.
- (a) Qual é a velocidade que tem que ter à saída da rampa de lançamento?
- (b) Qual é a altura máxima atingida no salto?

Capítulo 3

Forças e ligações

3.1 A importância das superfícies

Ficariamos muito surpreendidos se, ao colocar uma chávena de café sobre uma mesa, ela atravessasse a mesa para se estatelar no chão! Contudo, o peso da chávena não desaparece pelo facto de a pousarmos em cima da mesa. Por que razão não cai a chávena?

A mesa e a chávena não podem ocupar o mesmo espaço!

Parece uma resposta óbvia a uma pergunta que nem tinha razão de ser¹.

Não nos esqueçamos, contudo, que já estamos comprometidos com o paradigma newtoniano: todas as características do movimento dos corpos, **todas**, são determinadas por forças. Se a chávena fica em repouso é porque a resultante das forças que sobre ela actuam é nula: a mesa exerce uma força simétrica do peso.

O mundo do nosso quotidiano é feito de objectos: mesas, cadeiras, copos, pratos, paredes, etc. Estes objectos são limitados por superfícies e é através delas que os corpos entram em contacto. As forças mais imediatamente patentes à nossa percepção são exercidas nesses contactos. Nos filmes é possível apontar para um copo e fazê-lo elevar-se no ar. Na vida real temos que lhe pegar!

A questão que vamos abordar neste capítulo é a seguinte:

¹Albert Einstein dizia que o segredo do seu sucesso em Física residia no facto de nunca ter deixado de fazer as perguntas que as crianças fazem!

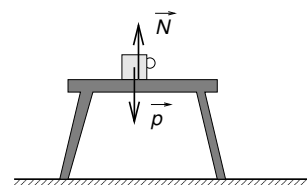


Figura 3.1: Se a reacção normal da mesa não fosse igual, em módulo, ao peso da chávena, esta não ficaria em repouso.

que forças se exercem nos processos de contacto entre corpos sólidos?

A nossa principal conclusão será, em breves palavras,

As forças que se exercem normalmente às superfícies de contacto (**reação normal**) e paralelamente às mesmas (**atrito**) tem origens, características e consequências nos movimentos bastante diferentes, pelo que é conveniente considerá-las separadamente.

3.2 Reacção Normal

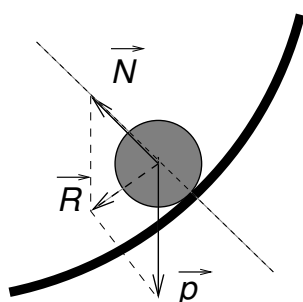


Figura 3.2: Se a superfície for rígida e o corpo estiver inicialmente em repouso, a reação normal \vec{N} , anula a componente do peso perpendicular à superfície e o corpo começa a movimentar-se sob a ação da resultante, \vec{R} , na direção paralela à superfície.

Se um corpo é empurrado, pelo seu peso ou por outra força, em direção a uma superfície sólida, esta responde com uma força na direção perpendicular à superfície e dirigida para o exterior do corpo que limita. Se o corpo estiver inicialmente parado, para que não penetre a superfície é necessário que a resultante das forças que nele actuam não tenha uma componente dirigida para o interior da superfície. Estas forças são designadas por **forças de reação normal**.

Não há magia nenhuma neste processo. Estas forças resultam das deformações das superfícies, em virtude das forças externas aplicadas. O que por vezes acontece é que estas deformações podem ser tão pequenas que se tornam imperceptíveis à nossa escala de observação.

Um exemplo semelhante diz respeito às forças de tensão em fios e cabos. Se amarrarmos um fio a um suporte fixo e pendurarmos nele uma massa de 1 kg, a força exercida pelo fio é 9,8 N; se penduramos 10 kg é de 980 N. De novo, se repararmos bem, o fio não tem exactamente o mesmo comprimento para as duas cargas. Mas pode ter variações de comprimento tão pequenas, que podemos simplesmente dizer que tem comprimento fixo. Claro, se tentarmos pendurar num fio uma tonelada, é provável que essa abordagem falhe!

Nestas condições, podemos considerar que os movimentos estão sujeitos a restrições, impostas pela presença de superfícies rígidas, fios de comprimento fixo etc. Estas restrições são designadas por **ligações**. Contudo, as leis de Newton são universais e essas restrições resultam das forças que os fios, ou as superfícies, exercem sobre os corpos. Só que, nestes casos, é mais fácil partir do conhecimento das ligações para determinar as forças do que ao contrário.

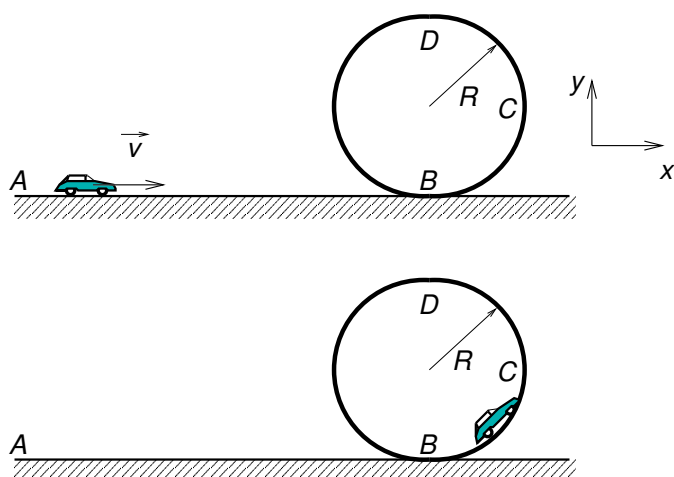


Figura 3.4: Conseguirá o carro completar o *loop*?

3.2.1 *Loop the Loop*

Viajamos num carro potente a alta velocidade. De repente vemos a estrada à nossa frente subir, subir, ... e, com espanto, notamos que se encurva por cima de nós formando um *loop* perfeito, que volta a descer nas nossas costas.

Deve tratar-se de um pesadelo, pois uma acrobacia como esta nunca foi tentada. No entanto carrinhos de brinquedo, sem motor, deslizando em pistas flexíveis de plástico, completam *loops* verticais sem dificuldade.

O que é necessário para completar um *loop*? Vejamos que Newton tem a dizer sobre isto.

Carro na recta de partida

A pista da figura 3.4 tem uma secção horizontal onde lançamos o carro e uma secção final em forma de circunferência no plano vertical.

No trajecto entre *A* e *B* o carro desloca-se na horizontal, o que significa que o peso do carro e a reacção normal da calha têm resultante nula. Se a reacção normal da calha for a única força que esta exerce, a velocidade do carro mantém-se constante: o movimento é uniforme e rectilíneo.

▷ Actividade 3.1



Figura 3.3: Por que é que os carrinhos não caem ao fazer o *loop*?

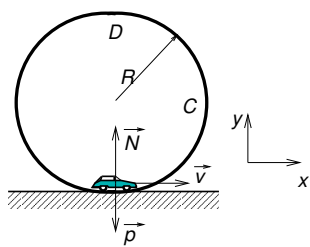


Figura 3.5: Início do movimento circular.

Carro em B

Quando o carro chega a B, inicia um movimento circular. Aqui temos um exemplo de ligação. A calha restringe o movimento do carrinho, forçando a sua trajectória a ser circular, no plano vertical. Um movimento circular tem uma aceleração dirigida para o centro da trajectória, a aceleração normal, dada por:

$$\vec{a}_{\perp} = \frac{v^2}{R}\hat{\mathbf{j}}.$$

Pela segunda lei (sempre ela!) a resultante das forças que actuam no carro já não é nula: vale

$$\vec{F} = m\vec{a}_{\perp} = m\frac{v^2}{R}\hat{\mathbf{j}}.$$

A reacção normal já não tem módulo igual ao peso: tem módulo maior que o peso para dar uma resultante dirigida para o centro da trajectória. O peso tem o sentido oposto ao de $\hat{\mathbf{j}}$:

$$\vec{p} = -mg\hat{\mathbf{j}}.$$

A reacção normal tem o sentido de $\hat{\mathbf{j}}$:

$$\vec{N} = N\hat{\mathbf{j}}.$$

Como

$$\vec{F} = (-mg + N)\hat{\mathbf{j}} = m\frac{v^2}{R}\hat{\mathbf{j}}$$

obtemos

$$N = mg + m\frac{v^2}{R}.$$

Primeira conclusão: a reacção normal da pista aumenta quando o carro chega a B. Para alterar a direcção da velocidade do carro, a pista tem que o “empurrar” no sentido ascendente com mais força que na secção inicial da pista.

Repare-se como este cálculo decorreu. Conhecendo as características do movimento, impostas pelas ligações, pudemos deduzir o valor da força de reacção normal da pista sobre o carrinho.

$\mathcal{E}\mathcal{T}\mathcal{V}_1$: Um passageiro viaja num carro com velocidade de 90 km h^{-1} que, tal como o carrinho de brinquedo, inicia uma subida com raio de curvatura no plano vertical $R = 100 \text{ m}$. Por que é que o passageiro sente o seu “peso” aumentar? Que força exerce ele sobre o assento?

Carro em D

Suponhamos que o carro completa meia volta e está agora em D . A sua velocidade será

$$\vec{v} = -v_D \hat{\mathbf{i}},$$

com um módulo, v_D , inferior ao da velocidade inicial: entretanto o carro subiu, aumentando a sua energia potencial gravítica e diminuindo a energia cinética. A aceleração normal é, agora,

$$\vec{a}_\perp = -\frac{v_D^2}{R} \hat{\mathbf{j}}$$

e tem a mesma direcção do peso,

$$\vec{p} = -mg \hat{\mathbf{j}}$$

e da reacção normal

$$\vec{N} = -N \hat{\mathbf{j}}.$$

A segunda lei implica

$$-(N + mg) = -m \frac{v_D^2}{R},$$

ou seja,

$$N = m \left(\frac{v_D^2}{R} - g \right).$$

Este resultado levanta uma questão que não surge no caso anterior:

e se N for negativo, isto é, $g > v_D^2/R$? Que quer isso dizer?

Se N for negativo, o vector

$$\vec{N} = -N \hat{\mathbf{j}}$$

não tem o sentido negativo do eixo Oy : tem o sentido oposto. Por exemplo, se $N = -5 \text{ N}$,

$$\vec{N} = -(-5) \hat{\mathbf{j}} = 5 \hat{\mathbf{j}}.$$

Mas a reacção normal numa superfície é sempre dirigida para o exterior do corpo que ela limita. Uma mesa só exerce uma força de reacção sobre um corpo dirigida para o interior da mesa, em

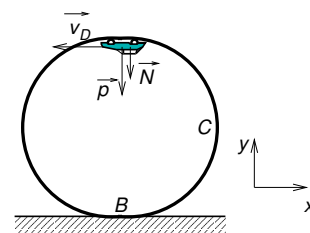


Figura 3.6: Quanto vale a reacção normal em D ?

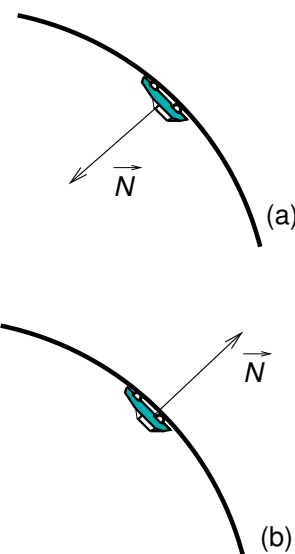


Figura 3.7: No caso (a) a direcção da reacção normal significa que a pista está a ser pressionada pelo carro. O caso (b) só possível se o carro deslizar em calhas que o impeçam de se separar da pista. De outro modo já teria descolado.

vez do exterior, se o corpo estiver “colado” à mesa e o tentarmos levantar. De igual modo, a pista só exerce uma reacção sobre um corpo que a “empurra”. Se a força de reacção da pista estiver dirigida para o exterior da trajectória circular (fig. 3.7b), o carro está a “puxar” a pista para dentro: acção e reacção tem sentidos opostos! Isso só seria possível se o carro deslizesse em calhas que não lhe permitissem separar-se da pista. Só desse modo a reacção normal poderia ter qualquer dos sentidos possíveis.

Uma vez que não é esse o caso, o que significa termos uma reacção normal dirigida no sentido “errado”?

Quando o carrinho sobe a pista a reacção normal diminui e, antes de trocar de sentido, anula-se. Nesse ponto o carro já não pressiona a calha e naturalmente perde o contacto com ela. O facto de obtermos uma reacção com o sentido “errado” significa apenas que o carro não completou o movimento circular e perdeu contacto com a calha antes de chegar a D .

Podemos assim concluir que o carrinho só passará em D se a sua velocidade nesse ponto for tal que

$$\frac{v_D^2}{R} > g$$

isto é

$$v_D > \sqrt{gR}. \quad (3.1)$$

$\mathcal{E}TV_2$: Suponhamos que o *loop* tem um raio de 50 cm e a massa do carro é de 100 g.

- a) Qual é a velocidade mínima que o carro tem de ter em D para completar a volta?
- b) Usar a conservação de energia cinética mais potencial gravítica, para relacionar as velocidades v_B e v_D . Com que velocidade tem o carro de passar em B para completar a volta?
- c) Para um carro de 1000 kg e um raio 200 m qual teria que ser a velocidade inicial necessária para completar a volta?

3.3 Forças de atrito

Empurrar um carro travado é quase como empurrar uma parede. Se o carro não se move, deve ser, certamente, em virtude das forças exercidas pelos calços dos travões nas rodas.

Atenção, **não é!** Pelo princípio de acção– reacção as rodas exercem no calços uma força oposta à que os calços exercem nas rodas: estas forças cancelam-se mutuamente e não podem cancelar a força externa com que empurramos o carro. O que impede o carro de se movimentar são forças exercidas pelo pavimento nos pneus. Estas forças não são a reacção normal do pavimento. A força com que empurramos o carro é paralela à estrada e só pode ser anulada por uma força com a mesma direcção e sentido oposto. A reacção normal é perpendicular à superfície da estrada.

Entre superfícies sólidas surgem, então, forças que se opõem ao deslizamento relativo de uma sobre a outra. São um facto da vida e chamam-se **forças de atrito**².

Um mundo sem atrito seria verdadeiramente estranho. Se espirrássemos à mesa, o copo, o prato e o resto da louça saiam a voar sobre a mesa. A falta de atrito entre a cadeira onde nos sentamos e o chão faria com que deslizássemos no sentido oposto. Os talheres escorregar-nos-iam nas mãos como enguias. Se tocássemos numa cadeira ela poderia deslizar pela sala fora até à parede. O motor de um carro poderia funcionar e pôr as rodas em movimento; mas estas rodariam sobre o pavimento como sobre gelo e o carro não andaria. E se andasse, como travá-lo?

Apesar de ser tão comum e familiar, o atrito entre superfícies é um fenómeno extremamente complexo, cuja natureza microscópica não está completamente compreendida.

3.3.1 Atrito estático

No caso do carro travado, referido acima, quanto vale a força de atrito exercida pelo pavimento nos pneus?

Se empurrarmos o carro com uma força de 10 N a força de atrito vale 10 N; se a força aplicada for 100 N a força de atrito vale 100 N; se for de 1000 N a força de atrito vale, igualmente, 1000 N. Com

²Os travões impedem as rodas de rodar nos seus eixos. Com o carro destravado os pneus podem rodar e o carro desloca-se sem que a superfície do pneu escorregue na estrada!

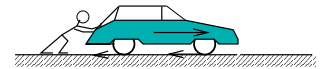


Figura 3.8: Por que é tão difícil deslocar um carro travado?

▷ Actividade 3.2

▷ Actividade 3.3

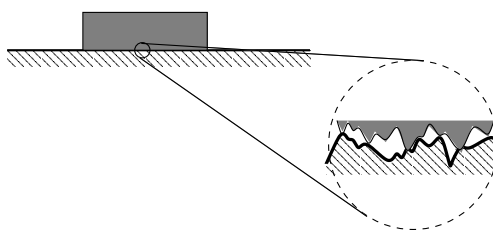


Figura 3.9: A área de efectivo contacto entre os materiais de dois corpos é muito menor do o que que parece à nossa escala.

efeito, se um carro travado se pusesse em movimento com uma força externa de 1000 N (aproximadamente o peso de 100 kg), ou os travões, ou o piso dos pneus, não estariam em condições.

Esta situação é semelhante à da força de reacção normal. Aquilo que chamamos superfícies “lisas” são, à escala microscópica, superfícies altamente irregulares com saliências e reentrâncias em escalas muito maiores que o tamanho de um átomo³. Quando duas superfícies são pressionadas uma contra a outra a área efectiva de contacto entre os dois materiais é muito menor que a área de contacto vista à nossa escala. A força de reacção normal é exercida apenas em pequeníssimas pontes onde os materiais se tocam e se ligam. Quando tentamos deslocar um corpo sobre o outro, essas pontes de ligação deformam-se e surge uma força que se opõe a esse deslocamento: a força de atrito estático.

No entanto essas pontes de ligação são frágeis, e com facilidade se quebram, se a força externa exceder um certo valor limite: a força de atrito entre duas superfícies tem um valor máximo possível, F_{\max} . Se o módulo da força externa exceder F_{\max} , a resultante deixa de ser nula e o corpo põe-se em movimento.

▷ **Lei empírica:** uma lei descoberta a partir de observações experimentais, mas cuja explicação em termos de leis fundamentais da Física pode não ser conhecida.

A **lei empírica** de Amonton-Coulomb descreve razoavelmente o fenómeno, na situação de duas superfícies sólidas em contacto. O **valor máximo** da força de atrito é proporcional à força de reacção normal que cada superfície exerce na outra:

$$F_a \leq F_{\max} = \mu N \quad (3.2)$$

em que μ , o coeficiente de atrito estático, depende da natureza das superfícies em contacto.

³Há uma excepção. Certos cristais separam-se naturalmente segundo determinados planos atómicos. As superfícies resultantes, superfícies de clivagem, podem ser muito regulares mesmo à escala atómica.

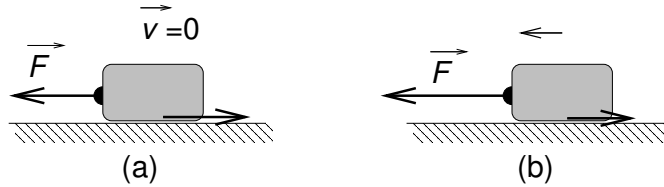


Figura 3.10: Lei de Amontou-Coulomb: (a) se a força externa, for inferior em módulo a μN , o módulo da força de atrito é igual ao da força externa; (b) se $F > \mu N$ o corpo entra em movimento.

Material 1	Material 2	μ (estático)	μ_c (cinético)
Cobre	Cobre	1,21	—
Vidro	Vidro	0,9 ~ 1,0	0,4
Grafite	Grafite	0,1	—
Teflon	Teflon	0,04	—
Borracha	Asfalto(seco)	0,5 ~ 0,8	—
Borracha	Asfalto(molh.)	0,25 ~ 0,075	—
Alumínio	Alumínio	1,05 ~ 1,35	1,4

Tabela 3.1: Coeficientes de atrito entre algumas substâncias (superfícies secas). Estes valores são extremamente sensíveis às condições das superfícies.

Podemos agora perceber por que é tão difícil deslocar um carro travado. Se o peso do carro for de 15 000 N ($m \sim 1500 \text{ kg}$) e usando o valor de $\mu = 0,5$, só será possível deslocar o carro aplicado uma força superior a

$$\mu N = \mu mg = 7500 \text{ N.}$$

(aproximadamente o peso de 750 kg).

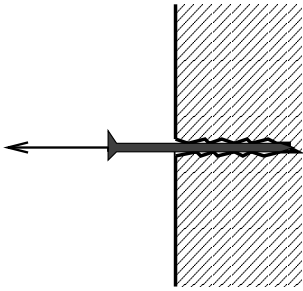


Figura 3.11: Por que custa tanto remover um prego?

\mathcal{ETV}_3 : Pregamos um prego, bem fundo, numa tábua. Depois queremos removê-lo e temos que o puxar com uma força considerável.

Por que é que a força que temos que exercer para remover o prego é tão elevada? O fenómeno de atrito estático desempenha algum papel neste processo? É o valor de μ que é elevado, ou o valor de N ?

3.3.2 Atrito cinético

Quando um carro em movimento trava, bloqueando as rodas⁴, os pneus escorregam (“derrapam”) sobre a estrada e esta exerce uma força de sentido oposto à velocidade do carro, pelo que esta diminui. A borracha que é arrancada aos pneus nas travagens é uma boa evidência da existência desta força.

Mais uma vez a força de atrito é tanto maior quanto maior for a reacção normal de uma superfície sobre a outra:

$$F_a = \mu_c N. \quad (3.5)$$

Contudo:

- Este é o valor da força de atrito quando a velocidade relativa das superfícies não é zero. No caso estático (superfícies em repouso relativo), uma lei semelhante dá o **valor máximo** da força de atrito.
- O coeficiente μ_c , **coeficiente de atrito cinético**, não é igual ao coeficiente de atrito estático μ : em geral, é menor.

▷ Actividade 3.4

⁴Para os conhecedores: é um carro sem ABS.

■ **Atrito estático: teoria de Bowden e Tabor** ■

A ideia de que a área de contacto efectivo entre duas superfícies, A_c , é muito menor que a área macroscópica foi desenvolvida por Bowden, Tabor e colaboradores na Universidade de Cambridge, na década de 1950.

Segundo estes autores, o contacto estabelece-se apenas entre as asperezas dos dois materiais (ver fig. 3.9) que ficam soldadas a frio, pela pressão elevada que suportam. Bowden e Taylor propuseram que a área efectiva de contacto seria proporcional à força normal de compressão das superfícies, N ,

$$N = PA_c, \quad (3.3)$$

em que P é uma pressão característica dos dois materiais em contacto. Se aumentarmos N , a área de contacto aumenta mas P é a mesma.

Por outro lado, estas pontes de contacto, se sujeitas a forças horizontais, paralelas à superfície, quebram se a força por unidade de área ultrapassar um limite, s . Assim a força de atrito máxima será

$$F_{\max} = A_c s = N \frac{s}{P}. \quad (3.4)$$

Segundo esta teoria o coeficiente de atrito estático é dado pelo cociente, s/P , de duas pressões características dos materiais em contacto.

Esta ideia explicaria por que razão a força de atrito não parece depender da área macroscópica de contacto. Um bloco prismático assente sobre qualquer face terá o mesmo valor de F_{\max} , porque a área efectiva de contacto será a mesma.

Investigações recentes têm confirmado a hipótese 3.3. Contudo o valor de μ previsto por esta teoria, $\mu = s/P$, pode ser calculado para superfícies metálicas e é sistematicamente mais baixo do que é observado.

A investigação dos mecanismos microscópicos do atrito continua muito activa [4].

Caixa 3.1: Os mecanismos microscópicos do atrito não totalmente conhecidos.

Uma consequência importante desta lei tem a ver com a segurança rodoviária.

Se consultarmos um manual de código, verificamos que as distâncias de segurança recomendadas, distâncias necessárias para imobilizar um veículo, dependem apenas da velocidade inicial: a mesma tabela serve para veículos de qualquer peso.

Para um carro de massa m numa estrada horizontal, a reacção normal da estrada, \vec{N} , tem módulo $N = mg$. A aceleração devida à força de atrito é

$$a = \frac{F_a}{m} = \frac{\mu_c mg}{m} = \mu_c g.$$

Esta aceleração não depende da massa (ou peso) do veículo, apenas do coeficiente de atrito entre os pneus e o pavimento. Dois veículos de pesos diferentes, terão a mesma aceleração numa derrapagem; se as velocidades iniciais forem idênticas, ficarão imóveis depois de percorrida a mesma distância.

\mathcal{ETV}_4 :

- 3.1. O módulo da força de atrito sobre uma furgoneta em travagem depende de ela estar carregada? E a distância de travagem?
- 3.2. As distâncias de travagem numa descida são as mesmas que em terreno horizontal?

3.4 Cabos, fios e coisas afins

Na recente tragédia de Nova Orleans, muitas pessoas foram salvas içando-as por cabos para os helicópteros de salvamento. Nas gruas, no sistema de travões de uma bicicleta, no alpinismo, nos reboques, usamos cordas e cabos para exercer forças sobre outros corpos a uma certa distância. Usando roldanas, podemos fazer com que as forças exercidas nos dois extremos de uma corda tenham direcções diferentes.

Como entender este tipo de interacção no contexto dos conceitos newtonianos?

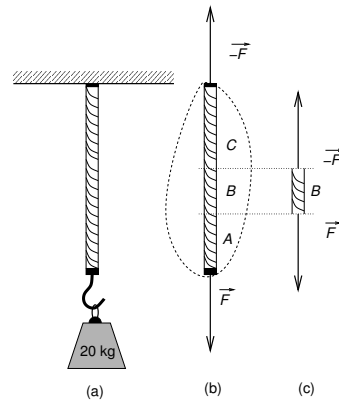


Figura 3.12: (a) Corpo suspenso numa corda; (b) forças sobre a corda; (c) forças sobre uma secção qualquer da corda.

3.4.1 Equilíbrio

Começemos por considerar o caso simples de um corpo suspenso por uma corda, ilustrado na figura 3.12 da página 73. Atente-se ao seguinte encadeamento de raciocínios baseados nas leis de movimento.

- O facto de o corpo estar em equilíbrio, sem aceleração, significa que a corda exerce sobre ele uma força ascendente de módulo $mg = 20 \times 9,8 = 196 \text{ N}$.
- A terceira lei de Newton implica que a extremidade inferior da corda está sujeita a uma força \vec{F} , exercida pelo corpo, de módulo 196 N e sentido descendente.
- A segunda lei de Newton **aplicada à corda** significa que a extremidade superior da corda está sujeita a uma força simétrica de \vec{F} : de outro modo a resultante das forças na corda não seria nula. O módulo de \vec{F} é a **tensão da corda**.
- Na realidade, a conclusão anterior ignora o peso da corda. A força exercida no suporte tem que ter um módulo ligeiramente superior a \vec{F} para equilibrar também o peso da corda. Para uma corda de massa 10 g o peso é de apenas $0,1 \text{ N}$ e a conclusão anterior não é significativamente alterada.

Podemos aplicar as leis de movimento a qualquer secção da corda. Facilmente concluimos, considerando o equilíbrio das partes A , B

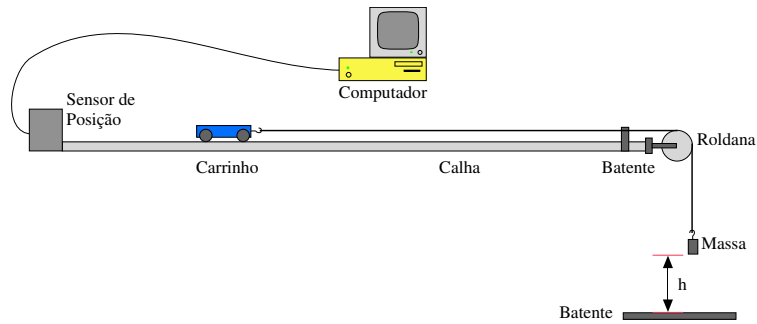


Figura 3.14: Esquema de montagem experimental usada na actividade A22.

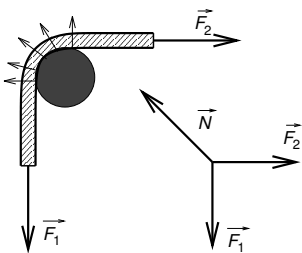


Figura 3.13: A corda estará em equilíbrio se os módulos das forças \vec{F}_1 e \vec{F}_2 forem iguais; mas estas duas forças não têm resultante nula. A resultante das forças de reacção normal da barra, \vec{N} , equilibra $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$.

e C da corda e desprezando o peso da corda, que **qualquer secção da mesma** está sujeita a duas forças simétricas, \vec{F} e $-\vec{F}$. Dizemos que a corda está sob uma tensão F , o módulo de \vec{F} .

Suponhamos, agora, que a corda dobra à volta de uma barra fixa, como na figura 3.13. Se as forças nas extremidades da corda, \vec{F}_1 e \vec{F}_2 , tiverem o mesmo módulo a corda fica em equilíbrio. Mas é óbvio que estas duas forças não têm resultante nula; nem sequer têm a mesma direcção. As forças de reacção normal da superfície da barra têm uma resultante \vec{N} , que, somada a \vec{F}_1 e a \vec{F}_2 , dá uma força resultante sobre a corda igual a zero:

$$\vec{N} + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0.$$

\mathcal{ETV}_5 Na situação da figura 3.13 o valor do módulo de \vec{F}_1 e \vec{F}_2 é de 100 N. Qual é a força (direcção sentido e módulo) exercida na barra?

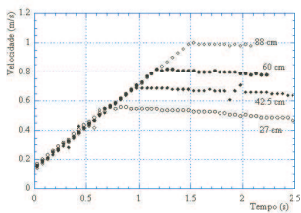


Figura 3.15: Enquanto a massa suspensa cai, o carro tem um movimento uniformemente acelerado (velocidade a crescer linearmente no tempo).

3.4.2 Movimentos acelerados

Na actividade A22, realizada no 11º ano, era usado um fio para ligar uma massa que caía na vertical, a um carrinho que deslizava numa mesa horizontal (figura 3.14). O movimento do carrinho, durante a queda da massa, era uniformemente acelerado, conforme se vê na figura 3.15.

Contudo, na altura, não fizemos a pergunta óbvia:

Qual é a aceleração do carrinho?

Sabemos que tem a forma

$$\vec{a} = a\hat{\mathbf{i}},$$

mas não sabemos o valor de a , o módulo da aceleração. Se ignorarmos força de atrito, sabemos que força exercida pelo fio terá módulo

$$F = m_c a, \quad (3.6)$$

em que m_c é a massa do carrinho.

Como determinar a e F se não conhecemos nem um nem outro?

Não podemos esquecer que a segunda lei também se aplica à massa suspensa: esta é actuada por duas forças:

- o peso, $\vec{p} = -m_s g \hat{\mathbf{j}}$;
- a força exercida pelo fio, $\vec{F} = F \hat{\mathbf{j}}$;

Por outro lado, a sua aceleração, \vec{a}_s , **se o fio tiver comprimento fixo**, tem o mesmo módulo que a aceleração do carrinho:

$$\vec{a}_s = -a \hat{\mathbf{j}}.$$

Então, a segunda lei, **aplicada à massa suspensa**, diz que:

$$(-m_s g + F) \hat{\mathbf{j}} = -m_s a \hat{\mathbf{j}} \quad (3.7)$$

ou

$$a = g - \frac{F}{m_s} = g - \frac{m_c}{m_s} a$$

em que usámos a equação $F = m_c a$. Obtemos então a solução para a aceleração

$$a \left(1 + \frac{m_c}{m_s} \right) = g \Rightarrow a = \frac{m_s}{m_s + m_c} g \quad (3.8)$$

e para a tensão no fio

$$F = m_c a = \frac{m_c m_s}{m_c + m_s} g. \quad (3.9)$$

Problema resolvido! Tínhamos duas grandezas a determinar, F e a , e pudemos estabelecer duas relações entre elas, as equações

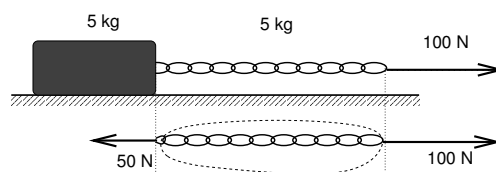


Figura 3.16: A aceleração do sistema é 10 m s^{-2} . A resultante das forças que actuam na corrente vale 50 N.

3.6 e 3.7, a segunda lei de Newton aplicada ao carro e à massa suspensa. O facto do fio ter comprimento fixo, **liga** os dois corpos e impõe que tenham acelerações com o mesmo módulo.

Bem, quase resolvido. Só falta explicar por que razão supusemos que os módulos das forças nos extremos do fio (no carro e na massa suspensa) são iguais. Na secção anterior, onde considerámos casos de equilíbrio isso fazia sentido. Todavia, neste caso, o fio também está acelerado. As forças nos seus extremos continuam a ser iguais?

Em geral, não. Tomemos o caso muito simples da figura 3.16, em que puxamos um corpo com uma corrente cuja massa é igual à do corpo. A aceleração do sistema (na ausência de atrito com a superfície) vale

$$a = \frac{100}{5 + 5} = 10 \text{ m s}^{-2}.$$

Como a corrente tem uma massa de 5 kg, a resultante das forças que actuam sobre ela vale:

$$R = 5 \times 10 = 50 \text{ N}.$$

Como na extremidade da direita está exercida uma força de 100 N, do lado esquerdo o corpo exerce uma força de 50 N. A tensão da corrente varia de uma extremidade à outra!

Por que razão afirmamos, então, que as forças na extremidade de um fio tem a mesma intensidade? Em geral farão uma diferença $\Delta F = m_f a$ em que a é a aceleração do fio e m_f a sua massa. Contudo, se m_f for muito pequena comparada com as massas dos corpos ligados, esta diferença pode ser desprezada. Em resumo:

As forças na extremidade de um fio que liga dois corpos tem quase o mesmo módulo, se a massa do fio for muito mais pequena que as massas ligadas pelo fio.

Se esta aproximação é ou não razoável, só a análise de cada situação o pode dizer.

\mathcal{ETV}_6 : O resultado da equação 3.8 faz sentido? Que acontece se a massa do carro for muito mais pequena que a massa suspensa, $m_c \ll m_s$? Que valor se obtém para a ? E no limite oposto, $m_c \gg m_s$? Quanto vale a tensão no fio em cada caso?

3.4.3 Cabos e fios ideais

Na análise de situações envolvendo cabos e fios fazemos muitas vezes um conjunto de simplificações:

- supomos que originam forças reactivas quando esticados, mas que são perfeitamente flexíveis, com forças de reacção nulas, se tentarmos reduzir o respectivo comprimento;
- supomos que, quando sujeitos a forças expansivas, mantêm comprimento fixo;
- desprezamos a respectiva massa em comparação com a dos corpos que ligam.

Tudo isto, como vimos, são idealizações. Não existem fios com estas propriedades. Certamente não existem fios sem massa e qualquer fio ou cabo sujeito a forças opostas nas suas extremidades, dirigidas para fora, aumenta de comprimento. Contudo, a massa de um fio pode ser cem ou mil vezes inferior à das massas que liga; a sua variação relativa de comprimento pode ser inferior a 1% ou menor. Nessas situações estas idealizações são extremamente úteis e permitem-nos obter respostas muito aproximadas sem conhecer mais nenhuma das características dos fios ou cabos envolvidos no problema.

3.5 Atrito e dissipação

Se quisermos elevar um corpo de massa m a uma altura Δh sem o acelerar, aplicamos externamente uma força \vec{F} oposta ao peso:

$$\vec{F} = -\vec{p} = -mg\hat{j}$$

Como sabemos do 10º ano, a energia que transferimos para a massa é medida pelo trabalho da força aplicada:

$$W = F \times \Delta h = mg\Delta h.$$

Por outro lado, para deslocarmos o mesmo corpo sobre uma mesa de uma distância d , temos que aplicar uma força externa que se oponha à força de atrito, e de igual módulo:

$$F = F_a = \mu_c N = \mu_c mg$$

e o trabalho que realizamos sobre o corpo é

$$W = F \times \Delta h = \mu_c \times m \times d.$$

No primeiro caso dizemos que aumentamos a energia potencial do corpo. Se o largarmos ele cai, acelera e a sua energia potencial converte-se em energia cinética.

No segundo caso, contudo, passa-se algo diferente. Se largarmos o corpo na posição final, ele não volta à posição inicial: não começa a deslizar sobre a mesa espontaneamente. Não reobtemos como energia cinética o trabalho que realizámos. Com efeito, se quisermos repor a situação original temos que realizar mais trabalho externo, pois a força que temos que aplicar tem novamente o sentido do deslocamento para se opor à força de atrito na viagem de regresso.

Que aconteceu, então à energia que fornecemos ao deslocar o corpo?

Esta questão foi discutida no 10º ano. Vimos que o deslocamento relativo de superfícies gera aquecimento: a temperatura aumenta. Este aumento de temperatura corresponde a um aumento da energia de movimento desordenado dos átomos ou moléculas do material. Por isso os processos de atrito dizem-se dissipativos. A energia não se perde: mas passa de movimentos macroscópicos, globais, dos corpos, para movimentos desordenados das suas moléculas, processo que se manifesta como um aumento de temperatura.

As forças de reacção normal, por sua vez, não são dissipativas. Quando um corpo se desloca sobre uma superfície, a reacção normal é **perpendicular** ao deslocamento e o respectivo trabalho é nulo. Não há transferências de energia associadas a estas forças num deslocamento paralelo à superfície.

\mathcal{ETV}_7 : Quando um carro de massa $m = 1200 \text{ kg}$ e velocidade 100 km h^{-1} trava e pára, qual é a energia dissipada pelas forças de atrito com o pavimento da estrada?

3.6 Respostas às $\mathcal{ETV}\mathcal{S}$

- 3.1. \mathcal{ETV}_1 Ao iniciar a subida, a aceleração do passageiro tem sentido vertical ascendente e vale:

$$\vec{a}_\perp = \frac{v^2}{R} \hat{j}.$$

Como a força sobre ele é a resultante do peso (sentido de $-\hat{j}$) e da reacção normal da calha (sentido de \hat{j}), a reacção normal tem de ser superior ao peso, para dar uma resultante não nula com o sentido da aceleração. Pelo princípio da acção e reacção, a força que o passageiro exerce sobre o assento é, em módulo, igual à reacção normal e, por isso, superior ao seu peso. O passageiro empurra o assento com mais força do que se estivesse em repouso ou movimento rectilíneo. Sente-se mais “pesado”.

- 3.2. \mathcal{ETV}_2

- (a) Usando o resultado discutido na secção 3.2.1 da página 65 (eq. 3.1) devemos ter

$$v_D > \sqrt{gR} = 2,2 \text{ m s}^{-1}.$$

- (b) Como a diferença de alturas é $2R = 1 \text{ m}$, a diferença de energia potencial entre D e B é

$$\Delta E_p = mg(y_D - y_B) = 0,1 \times 9,8 \times 1 = 0,98 \text{ J}.$$

A energia cinética diminui deste valor na subida:

$$\frac{1}{2}mv_D^2 - \frac{1}{2}mv_B^2 = -0,98 \text{ J},$$

o que dá

$$v_B^2 = v_D^2 + \frac{2}{m}0,98 = (4,9 + 19,6) \text{ m}^2 \text{ s}^{-2},$$

isto é,

$$v_D = 4,9 \text{ m s}^{-1}.$$

- (c) Usando as mesmas equações, com $m = 1000 \text{ kg}$ e $R = 200 \text{ m}$, obtemos:

$$v_D^2 = 1960 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2};$$

$$\Delta E_p = mg(y_D - y_B) = 1000 \times 9,8 \times 400 = 3,92 \times 10^6 \text{ J};$$

$$v_B^2 = v_D^2 + \frac{2}{1000} 3,92 \times 10^6 = 9800 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}.$$

$$v_D = 99 \text{ m s}^{-1} = 356 \text{ km h}^{-1}.$$

Note-se que não levamos em conta o trabalho das forças de reacção da calha durante a subida. A razão é simples. A velocidade do carro é sempre paralela à calha; o deslocamento num pequeno intervalo de tempo, $\Delta \vec{r} = \vec{v} \Delta t$, também. Como a reacção da calha é perpendicular à superfície, é também perpendicular ao deslocamento, $\Delta \vec{r}$: o respectivo trabalho é zero.

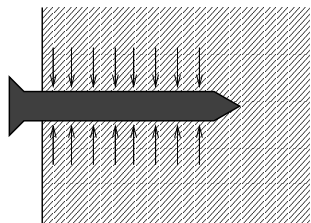


Figura 3.17: As forças de reacção normal sobre a superfície lateral do prego são elevadas.

- 3.3. $\mathcal{E}\mathcal{T}\mathcal{V}_3$: O prego tem que comprimir a madeira para penetrar na tábua. É de esperar que fique sujeito a forças de reacção normal elevadas, na sua superfície lateral. Para remover o prego, a sua superfície lateral tem que deslizar na superfície da madeira comprimida e surgem forças de atrito estático. Essas forças são tanto mais elevadas quanto mais elevadas forem as forças normais à superfície lateral do prego (lei de Amonton-Coulomb).

3.4. $\mathcal{E}\mathcal{T}\mathcal{V}_4$

- (a) A força de atrito depende do coeficiente de atrito μ_c e da força de reacção normal do solo

$$F_a = \mu_c N.$$

Se a furgoneta estiver carregada, o seu peso é maior e a reacção normal também. A força de atrito é maior. Como $N = mg$ a força de atrito é $F_a = \mu_c mg$ e a aceleração é

$$a = \frac{\mu_c mg}{m} = \mu_c g.$$

Como a aceleração não depende de m , a distância de travagem também não.

- (b) Não. Por um lado, a força de reacção normal é mais pequena em módulo: logo a força de atrito é menor. Além disso, o peso tem uma componente paralela à velocidade. A componente da resultante paralela à estrada é menor o que implica uma aceleração de travagem também menor em módulo: a distância de travagem será maior.

- 3.5. $\mathcal{E}\mathcal{T}\mathcal{V}_5$ Como a resultante das forças de reacção normal da barra sobre a corda, \vec{N} , é simétrica de $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$,

$$\vec{N} = -(\vec{F}_1 + \vec{F}_2),$$

a resultante das forças **da corda sobre a barra** é $-\vec{N} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$.
Sendo assim

$$\begin{aligned}\vec{F}_1 &= -100\hat{j} \\ \vec{F}_2 &= 100\hat{i} \\ -\vec{N} &= 100\hat{i} - 100\hat{j}\end{aligned}$$

Esta força tem módulo $N = \sqrt{100^2 + 100^2} = 100\sqrt{2} = 141\text{ N}$ e a direcção e sentido de $\hat{i} - \hat{j}$ (45° com semi-eixo positivo Ox e 45° com semi-eixo negativo Oy).

- 3.6. $\mathcal{E}\mathcal{T}\mathcal{V}_6$: se a massa do carro for muito mais pequena que a da corpo suspenso, o movimento deste deve ser próximo de uma queda livre, $a \approx g$. Com efeito, se $m_c \ll m_s$, temos $m_c + m_s \approx m_s$ e

$$a \approx \frac{m_s}{m_s}g = g.$$

Neste caso, $F \ll m_s g$. No limite oposto, o carro terá uma aceleração muito pequena, muito menor que g . Com efeito, se $m_c \gg m_s$, $m_c + m_s \approx m_c$ e

$$a \approx \frac{m_s}{m_c}g \ll g.$$

Neste caso a força exercida pelo fio é

$$F = m_c a \approx m_s g.$$

Ou seja, é quase igual ao peso da massa suspensa (por isso a sua aceleração é quase zero).

- 3.7. $\mathcal{E}\mathcal{T}\mathcal{V}_7$: toda a energia cinética de translação do carro é dissipada

$$E_c = \frac{1}{2} \times 1200 \times \left(\frac{100}{3,6}\right)^2 = 4,63 \times 10^6 \text{ J}.$$

Na realidade, a energia dissipada é ainda maior. À energia cinética de translação do carro temos que somar a energia de movimento relativo das suas partes (rodas, eixos, etc).

3.7 Actividades, questões e problemas

3.7.1 Actividades

3.1. Garrafão destapado, invertido, que não verte.

Tomemos um garrafão de água de 5 l, destapado, com alguma água no fundo. Com o braço giremos o garrafão num arco vertical de 360° . É possível fazê-lo sem entornar uma gota de água? Como? Porquê? Se pusermos mais água no garrafão temos que girar o braço com mais velocidade, menos velocidade, ou a mesma?

3.2. Lei de Amonton-Coulomb

Ver ficha de Actividade A33.

3.3. Atrito e força centrípeta

Ver ficha de actividade A34.

3.4. Distâncias de travagem

Ver ficha de Actividade A35.

3.5. Máquina Atwod

Ver ficha de actividade A36.

3.7.2 Questões

- 3.1. O problema do carro que percorre um *loop* vertical numa calha de plástico é semelhante ao de uma pedra presa na ponta de um fio que roda no plano vertical. Podemos supor um fio de massa muito mais pequena que a da pedra e de comprimento fixo.
 - (a) A velocidade da pedra tem módulo constante? Em que ponto da trajectória é máxima? E mínima?
 - (b) A tensão no fio é constante ou varia conforme a posição da pedra? Em que ponto da trajectória é máxima e em que ponto é mínima?
- 3.2. Quando andamos de balouço sentimo-nos “mais pesados” quando o balouço passa na posição de altura mínima. Porquê?
- 3.3. Quais são as unidades dos coeficientes de atrito estático e cinético?
- 3.4. Os carros de Fórmula I tem **ailerons** que fazem com que o escoamento do ar a altas velocidades empurre o carro contra a estrada. Por que é que isto melhora a aderência ao solo, permitindo curvas a mais alta velocidade?
- 3.5. Duas caixas de metal idênticas estão pousadas numa mesa. Uma das caixas está vazia. A outra está cheia e pesa o dobro da primeira. A mesa é lentamente inclinada até as caixas começarem a deslizar.
 - (a) Qual das caixas começa a deslizar primeiro? Ou começam a deslizar ao mesmo tempo?

- (b) Imediatamente antes das caixas se moverem as forças de atrito sobre cada uma são idênticas? Se não, em qual das caixas é maior a força de atrito?
- 3.6. Se segurarmos um recipiente cilíndrico apertando com os dedos a sua superfície lateral e o enchermos com água, temos que apertar cada vez com mais força, à medida que ele enche, para que não escorregue.
- (a) Que tem isto a ver com a lei de Amonton-Coulomb para a força de atrito?
- 3.7. Uma biblioteca com pouco espaço tem os livros muito apertados na estante. Por que razão é difícil tirar um livro da estante? Explicar este facto em termos das forças que os livros exercem uns nos outros.
- 3.8. Se largarmos um cubo de madeira no cimo de uma calha inclinada e medirmos o tempo que demora a chegar à base podemos obter uma estimativa do coeficiente de atrito cinético. Dar uma explicação breve e sintética do modo como poderia ser feita essa estimativa. Que outras medições seriam necessárias?
- 3.9. O coeficiente de atrito entre os pneus de um carro e um piso seco é da ordem de $\mu = 0,6$. Será seguro tentar subir uma rampa de inclinação de 30° ?
- 3.10. Um disco de metal está preso na ponta de uma vara rígida, que roda em torno de um eixo horizontal com velocidade de módulo constante.
- (a) Fazer uma representação esquemática das forças exercidas sobre o disco, e da respectiva resultante, nos pontos A a D indicados na figura 3.18.

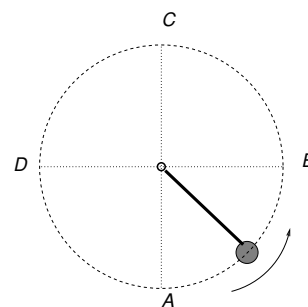


Figura 3.18: Como varia a força exercida pelo disco na vara?

3.7.3 Problemas

- 3.1. Um pedra de massa $m = 1 \text{ kg}$ está presa na ponta de uma corda de comprimento $l = 0,5 \text{ m}$. A outra extremidade da corda está fixa. A pedra roda no plano vertical, com uma frequência de 2 revoluções por segundo.
- (a) Se o movimento circular fosse uniforme, quais seriam as tensões máximas e mínimas da corda?

- (b) Mostrar que a tensão máxima é superior ao valor máximo calculado na alínea anterior e o valor mínimo é inferior ao valor mínimo calculado em (a).
- 3.2. Um camião TIR de 20 toneladas está parado numa rampa com uma inclinação de 8%⁵. O coeficiente de atrito dos pneus do camião com o piso da estrada é de 0,7.
- (a) Qual é o valor da força de atrito exercida pela estrada no camião?
- 3.3. Uma funda é uma arma de arremesso, constituída por uma faixa de tecido, dobrada em duas com uma pedra colocada na dobra. A funda é rodada, num plano horizontal, a alta velocidade e quando uma das pontas de tecido é largada, a pedra é projectada.
- (a) Para um comprimento da funda (dobrada) de 50 cm e uma frequência de rotação $f = 3\text{ Hz}$, qual é a força exercida na funda por um projectil de massa 0,5 kg?
- 3.4. Uma das características geralmente indicadas para um modelo automóvel é o tempo que demora a atingir os 100 km h^{-1} partindo do repouso.
- (a) Se este tempo for de 4 s qual é a aceleração média do automóvel?
- (b) Este tempo não pode ser inferior a um limite determinado pelo coeficiente de atrito dos pneus com o solo, μ , independentemente da potência do motor. Porquê? Quanto vale esse limite para $\mu = 0,7$?
- 3.5. Numa estrada de piso horizontal qual é o raio de curvatura mínimo que um automóvel pode descrever à velocidade de 120 km h^{-1} ($\mu = 0,70$)?
- 3.6. Um jovem, com sapatos de sola de couro, corre sobre um soalho encerado e patina para parar antes inverter o sentido de marcha.
- (a) Se a sua velocidade, quando começa a patinar, for $v = 5\text{ m s}^{-1}$ e deslizar dois metros, qual é o coeficiente de atrito entre o soalho e a sola dos sapatos?

⁵Uma inclinação de 8% significa que a estrada sobe 8 m por cada 100 m percorridos.

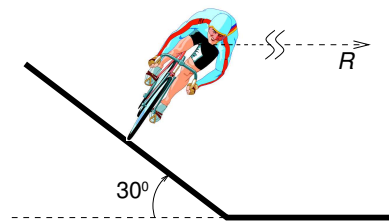


Figura 3.20: A componente da força de atrito no plano da figura pode ser nula.

- (b) Estes dados são suficientes para determinar a energia dissipada no escorregamento? Se não, que dados faltam?

3.7. Os escorregas dos parques aquáticos são desenhados para reduzir ao mínimo as forças de atrito sobre os seus utentes. Em primeira aproximação, as forças sobre o utente do escorrega são o seu peso e a reacção normal da superfície do escorrega.

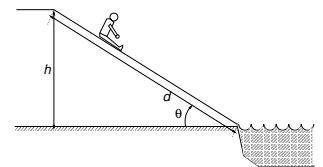


Figura 3.19: A água do escorrega diminui o atrito.

- (a) Mostrar que a aceleração do utente é

$$a = g \sin \theta,$$

em que θ é o ângulo da superfície do escorrega com a horizontal.

- (b) Para uma pista de comprimento $d = 20 \text{ m}$ com um desnível $h = 8 \text{ m}$, quanto tempo demora a descida?
- (c) Com que velocidade chegam os utentes ao fim do escorrega?

3.8. O ciclista da figura 3.20 descreve uma trajectória circular de raio $R = 50 \text{ m}$, sobre um pavimento inclinado de 30° relativamente ao plano da trajectória.

- (a) Qual deve ser a sua velocidade para que a força de atrito tenha componente nula no plano da figura?
- (b) Quanto vale a reacção normal do piso nessa situação? Falta algum dado para a poder calcular? Qual?

3.9. Um bloco de madeira demora 1 s a escorregar (partindo do repouso) uma rampa de comprimento $1,5 \text{ m}$ de comprimento e com uma inclinação de 30° relativamente ao plano horizontal.

- (a) Qual é a aceleração do bloco?
- (b) Quanto vale o coeficiente de atrito cinético da madeira com o material da rampa?
- 3.10. As montanhas russas têm frequentemente *loops*. Uma estudante de física, ($m = 50 \text{ kg}$) resolve levar uma balança e sentar-se em cima dela durante uma viagem numa montanha russa. A sua carruagem chega quase parada ao cimo de um *loop* de diâmetro 15 m e depois desce sob a acção da gravidade até à base.
- (a) Se a carruagem caísse sem atrito e houvesse conservação de energia mecânica, que valor indicaria a balança quando a carruagem passasse no ponto mais baixo do *loop*?
- (b) Se houver dissipação de energia mecânica a balança indica mais, menos ou o mesmo?
- (c) Se o diâmetro do *loop* for maior, a balança indica mais, menos ou o mesmo?
- 3.11. Quando um carro trava numa rampa com inclinação θ em relação à horizontal, nem a reacção normal da estrada é mg , nem a força de atrito é a única na direcção da aceleração.
- (a) Mostrar que a aceleração de um carro que trava numa descida com inclinação θ em relação à direcção horizontal é
- $$a = g(\mu_c \cos \theta - \text{sen} \theta)$$
- em que μ_c é o coeficiente de atrito cinético.
- (b) Quanto vale a aceleração numa travagem a subir a mesma estrada?
- 3.12. Num actividade experimental um sensor de força é fixo a um carrinho numa calha linear. Um fio é amarrado ao sensor, passa por uma roldana e suspende uma massa $m_s = 100 \text{ g}$. A massa do carrinho e sensor é $m = 350 \text{ g}$. (ver fig. 3.21). Ignorar forças de atrito e desprezar a massa do fio.
- (a) Se segurarmos no carrinho, não o deixando movimentar-se, quanto lê o sensor de força?
- (b) Se largarmos o carrinho deixando a massa suspensa arrastá-lo, qual será o valor da força lida pelo sensor?

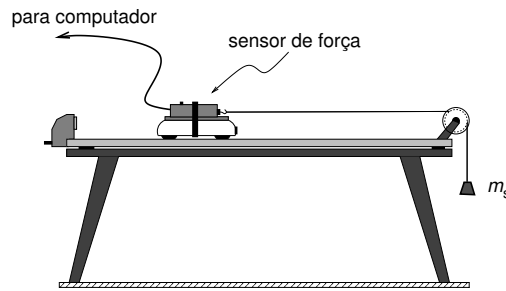


Figura 3.21: A força lida no sensor aumenta ou diminui quando deixamos o carrinho andar?

3.13. Duas esferas de aço de 5 kg de massa cada estão ligadas por uma corda de 1 m de comprimento e giram uma em torno da outra, em movimento circular com 5 revoluções por segundo.

(a) Qual é a tensão da corda?

3.14. A esfera de massa $m = 50\text{ g}$ da figura 3.23 gira amarrada a um suporte fixo descrevendo uma trajectória circular de raio $R = 30\text{ cm}$ e fazendo duas revoluções completas por segundo.

- (a) Quanto vale em módulo a aceleração da esfera?
 (b) Quanto vale o comprimento, l , do fio de suporte?
 (c) Quanto vale a tensão do fio de suporte?

3.7.4 Desafios

3.1. No lançamento do martelo os atletas fazem girar um esfera de aço de massa $7,257\text{ kg}$ colocada no extremo de um cabo de $1,22\text{ m}$. O actual recorde do mundo masculino é de $86,74\text{ m}$. O comprimento dos braços de um atleta é de cerca de 1 m . A partir destes dados construir um modelo do lançamento que permita:

- (a) estimar a velocidade com que a esfera é largada;
 (b) estimar a tensão no fio no acto de lançamento.

3.2. Um sistema binário é constituído por duas estrelas de massa semelhante que orbitam uma em torno da outra, sob a acção da atracção gravítica mútua. Se as massas forem iguais, as estrelas podem ter órbitas circulares em torno do ponto

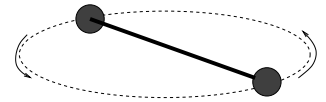


Figura 3.22: Qual é a tensão da corda?

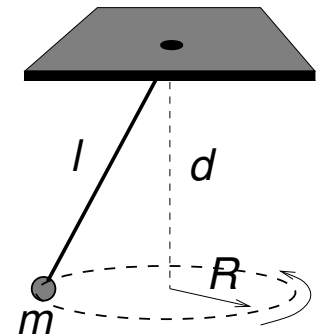


Figura 3.23: Pêndulo cónico.

médio da recta que as une. Mostrar que a massa de cada estrela pode ser obtida medindo o período de rotação e a distância entre as duas estrelas.

Capítulo 4

Fluidos

4.1 Pressão

A pressão, P , exercida sobre uma superfície é a força por unidade de área:

$$P = \frac{F}{A}.$$

No SI as unidades de pressão são o Nm^{-2} também designado por Pascal (Pa). Por que razão se define esta grandeza?

Se caminharmos sobre um soalho de madeira macia, recentemente polido, com havaianas nos pés, não causamos danos que incomodem o proprietário do dito soalho. No entanto, se usarmos sapatos ferrados com picos, apropriados para subir montanhas cobertas de neve, ou sapatos de tacões, tipo estilete, com os quais algumas senhoras realizam constantes prodígios de equilíbrio, não seremos, certamente, tão bem recebidos.

A força total exercida no soalho é em ambos os casos a mesma, o nosso peso. Contudo, no segundo caso, ela é exercida numa área muito menor. Se imaginarmos a área de contacto dividida em pequenos quadrados iguais, a força em cada quadrado é muito maior no segundo caso que no primeiro, embora seja exercida em menos quadrados. O resultado é que a deformação do soalho na área de contacto pode tornar-se permanente, para grande desgosto do proprietário do soalho. A maneira de comparar forças em quadrados de igual área é conhecer a pressão, a força por unidade de área.

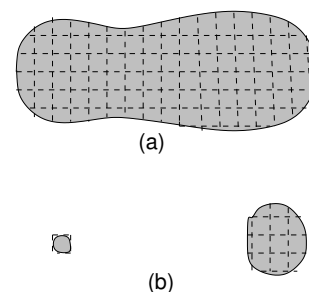


Figura 4.1: Mesmo que as forças exercidas no solo pela havaiana (a) e pelo sapato de tacão (b) sejam iguais, as forças exercidas em cada rectângulo de igual área são muito maiores no segundo caso.

$\mathcal{E}\mathcal{T}\mathcal{V}_1$: Cada uma das botas de um esquiador tem uma base que corresponde aproximadamente a um rectângulo de $10 \times 30 \text{ cm}^2$.

- (a) Que força exerce um esquiador de 80 kg sobre a área de neve debaixo de cada bota, quando assente sobre os dois pés?
- (b) Se calçar esquis de $10 \times 220 \text{ cm}^2$, que força exerce sobre a área correspondente à base de uma bota (300 cm^2)?

O conceito de pressão é importante sempre que lidamos com forças exercidas através de superfícies. Outro exemplo é o das forças entre um gás ou líquido e as paredes do recipiente que o contém. Se imaginarmos uma porção da superfície da parede, de área A , dividida em pequenos quadrados, cada um está em contacto com partes do fluido com propriedades idênticas: a força em cada quadrado deve ser a mesma. A força total sobre a porção de superfície que estamos a considerar será então proporcional ao número de quadrados, ou seja à área total, A :

$$F = P \times A.$$

O que caracteriza o fluido é a pressão, P , não a força sobre a parede.

Neste capítulo e no seguinte vamos fazer uma introdução a alguns aspectos da física de fluidos, quer em equilíbrio, quer em movimento. Vivemos, andamos, corremos, saltamos e voamos num fluido, o ar. Outro fluido, a água, é o nosso principal constituinte, e tem um papel fundamental na nossa existência. Não é difícil compreender o quanto as nossas vidas dependem da nossa compreensão das propriedades de fluidos, em particular, do modo como se movem.

Uma das características mais evidentes dos fluidos é que as suas diferentes partes se podem mover com velocidades e acelerações distintas. Daí que a aplicação das leis de movimento implique a consideração das forças internas, entre diferentes partes ou porções do fluido. Não é suficiente, como no caso dos sólidos (rígidos), considerar as forças externas. Veremos que o conceito de pressão

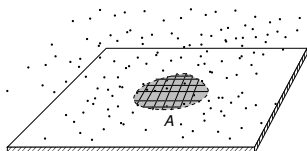


Figura 4.2: Cada pequeno quadrado da zona sombreada está em contacto com fluido com idênticas propriedades; as forças em cada quadrado são iguais.

é fundamental neste contexto, porque as forças internas são exercidas através das superfícies que separam as diferentes partes do fluido.

A questão central deste capítulo é então:

Como podemos compreender os movimentos de fluidos (líquidos e gases) de acordo com as leis de Newton?

A estratégia será:

Teremos que aprender a considerar as forças internas que podem existir entre as diferentes partes de uma massa de líquido ou gás, em particular as forças de pressão, e aplicar as leis de Newton a cada uma dessas partes.

4.1.1 Factos importantes sobre a pressão

Dois factos importantes sobre a pressão em fluidos em equilíbrio são fáceis de verificar:

1. A força de pressão sobre uma superfície é perpendicular à mesma.
2. A pressão num fluido aumenta com a profundidade à superfície da Terra.

Se observarmos uma mangueira furada notamos que os jactos de água emergem dos furos na direcção perpendicular à superfície da mangueira, não na direcção de escoamento da água (ver também a Caixa 4.1). Isso acontece devido ao primeiro facto referido. A água empurra a superfície da mangueira na direcção perpendicular à mesma. Quando removemos uma parte da parede da mangueira (um furo) a água é ejectada nessa mesma direcção.

O segundo facto explica por que razão, quando mergulhamos, só podemos respirar por um tubo próximo da superfície da água. Mais à frente veremos que a dez metros de profundidade a pressão ambiente já é o dobro da pressão atmosférica, a pressão à superfície da água. Para conseguir inspirar teríamos que reduzir a pressão nos pulmões para menos que a pressão atmosférica, que é a pressão na outra extremidade do tubo; de outro modo o ar da superfície não entra no tubo. A nossa musculatura não consegue criar uma diferença de pressão tão grande entre o interior dos pulmões e o exterior da caixa torácica.

▷ Actividade 4.1.



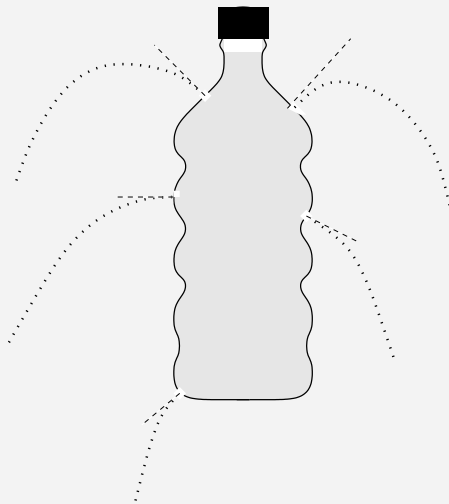
Figura 4.3: Abaixo de uma certa profundidade não é possível respirar por um tubo.

■ Uma experiência para casa. ■

Para esta demonstração não é necessário mais do que uma garrafa de plástico e um alfinete ou piónés.

Com a garrafa cheia de água e tapada, fazem-se vários furos, com o piónés, em diferentes pontos da superfície da garrafa. Como a superfície não é lisa, é possível fazer os furos em pontos da superfície com orientações variáveis.

Espremendo a garrafa verifica-se que os jactos saem de cada furo na direcção perpendicular à superfície no ponto onde foi feito o furo.



Os jactos num garrafa furada emergem perpendicularmente à superfície no local de cada furo.

Caixa 4.1: Uma experiência para fazer na cozinha, em casa.

4.2 Lei fundamental da Hidrostática

Os dois factos acima referidos são consequências das Leis de Newton e de algumas propriedades elementares de fluidos. Começemos por tentar compreender o equilíbrio de uma coluna de água.

Na superfície livre da água é exercida pelo ar uma força de sentido vertical descendente de módulo

$$F = P_0 A,$$

em que P_0 é a pressão atmosférica. Esta força não é pequena. Em 1663 Otto von Guericke, mostrou que as forças de pressão atmosférica sobre uma semi-esfera de 51 cm de diâmetro eram superiores à força combinada de oito cavalos (Caixa 4.2da página 94).

ETV₂: A pressão atmosférica é cerca de 10^5 Pa. Qual é o módulo da força que o ar exerce sobre a superfície da água numa piscina de 25 m ($25 \times 16 \text{ m}^2$)?

Se o recipiente da figura 4.4 tiver uma secção circular de raio 5 cm, a força total sobre a superfície é de 785 N. A porção de líquido de altura h na figura 4.4 está a ser empurrada para baixo por uma força de 785 N. Por que não cai?

Não basta dizer que há líquido por baixo! Recordemos Newton: os estados de movimento (repouso, uniforme, acelerado) são determinados por forças. Com esta porção de líquido está em equilíbrio (sem aceleração) a resultante das forças que actuam nela é nula. O líquido que está por baixo terá que exercer forças de pressão, através da superfície a tracejado, que anulem esta força de 785 N. . . , mais o peso da coluna de líquido que está por cima!

Se $P(h)$ for a pressão à profundidade h , a condição de equilíbrio será

$$P(h) \times A = P_0 \times A + mg.$$

A massa de líquido até à profundidade h é

$$m = \rho \times V = \rho \times A \times h,$$

em que ρ é a massa volúmica da água. Logo

$$P(h) = P_0 + \rho gh. \quad (4.1)$$

▷ Actividade 4.2

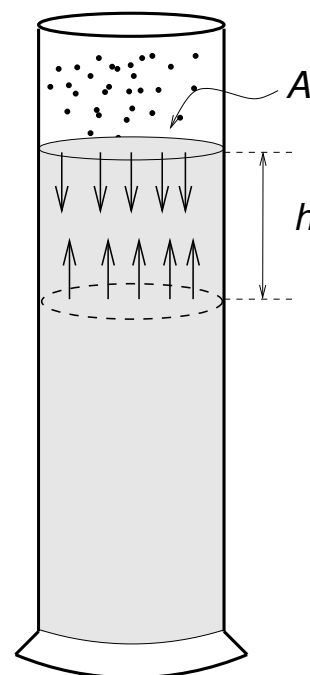


Figura 4.4: A parte inferior da coluna de líquido tem que exercer forças sobre a parte superior que cancelem as forças de pressão atmosférica e o peso da mesma.

▷ Lei fundamental da hidrostática

■ As esferas de Magdeburgo ■

Uma das demonstrações de Física mais vistosas do século XVII foi levada a cabo em Magdeburgo, em 1663, por Otto von Guericke, um inventor, cientista e político alemão. Na altura era Burgomestre de Magdeburgo.

Von Guericke inventou a bomba de vácuo de pistão. Na referida demonstração juntou dois hemisférios de cobre, de 51 cm de diâmetro, selou-os com um vedante de borracha e extraiu o ar do seu interior.

Depois, atrelou duas equipas de 8 cavalos a cada hemisfério, as quais não foram capazes de os separar, até von Guericke deixar entrar de novo o ar no interior da esfera. Esta demonstração foi feita na presença do Rei Frederico Guilherme I de Brandemburgo. Com esta experiência von Guericke pôs em evidência a existência de forças de pressão na atmosfera e ajudou ultrapassar o conceito medieval de “horror da natureza ao vácuo”, substituindo-a pela ideia que são as forças de pressão que empurram o ar para um recipiente evacuado.



Caixa 4.2: As esferas de Magdeburgo.

À profundidade h a pressão aumentou de ρgh , que é precisamente o peso de uma coluna de líquido de altura h base de área unitária.

Este resultado tem o nome, algo pomposo, de **lei fundamental da hidrostática**. Repare-se, contudo que:

- aplica-se apenas a fluidos em equilíbrio, na presença de um campo gravítico. Sem gravidade não há variação de pressão.
- baseia-se na suposição que a massa volúmica do fluido é constante e não varia, por exemplo, com a pressão.

Esta segunda hipótese é verificada em muitas situações com líquidos. Nessas situações os líquidos dizem-se **incompressíveis**. No caso dos gases, por outro lado, uma duplicação de pressão, a temperatura constante, reduz o volume a metade e duplica a massa volúmica. Em consequência, a variação de pressão atmosférica com a altitude deixa de ser bem descrita pela equação 4.1 para valores de h superiores a alguns quilómetros.

Este exemplo introduziu (subtilmente) um conceito fundamental na compreensão da física de fluidos: as forças de pressão não existem apenas nas paredes dos recipientes que contêm fluidos; existem também no interior dos fluidos. Se imaginarmos uma superfície a separar duas partes do fluido existem forças de pressão exercidas por cada uma das partes na outra através dessa superfície.

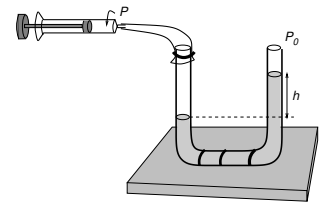


Figura 4.5: A pressão P é $P_0 + \rho gh$. Porquê?

$\mathcal{E}TV_3$: A massa volúmica da água do mar é cerca de $1 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$. A que profundidade é que a pressão é o dobro da pressão atmosférica?

$\mathcal{E}TV_4$: O manómetro é um dispositivo muito simples de medição de diferenças de pressão baseado na variação de pressão com a altura de uma coluna de líquido (fig. 4.5).

Consiste simplesmente num tubo em forma de U, aberto, transparente, com um líquido de massa volúmica, conhecida, ρ . Se a pressão num dos braços for superior à pressão atmosférica, o líquido sobe no braço oposto. A pressão medida é a pressão atmosférica acrescida de ρgh em que h é a diferença de altura do líquido dos dois braços do manómetro. Explicar porquê.

4.2.1 Direcção das Forças de Pressão.

O exemplo anterior mostrou que no interior de um líquido devem existir forças de pressão com a direcção do campo gravítico, em superfícies perpendiculares ao mesmo. Será possível ter um líquido em equilíbrio com forças apenas nessa direcção?

Num dos primeiros factos que referimos acima, vimos que as forças de pressão se exercem perpendicularmente a qualquer superfície do recipiente que contenha o fluido.

É possível mostrar a partir das leis de Newton, que as forças de pressão que uma parte de um fluido em equilíbrio exerce sobre outra parte são sempre perpendiculares à superfície que as separa e têm módulo **independente da orientação da superfície**.

Assim se imaginarmos uma superfície de área A perpendicular a um versor \hat{n} a separar duas partes de um fluido, as forças de pressão de uma parte sobre a outra terão a expressão

$$\vec{F} = P \times A \times \hat{n}$$

em que P é a pressão e não depende da orientação da superfície (do versor \hat{n}).

Como vemos as forças de pressão, \vec{F} , são vectores com direcção sentido e módulo como qualquer força. Mas a pressão num líquido em equilíbrio, P , é uma grandeza que, como a massa volúmica, não está associada a nenhuma direcção particular, embora possa variar de ponto para ponto: **é um escalar**.

4.2.2 Paradoxo de Hidrostática

Nesta secção vamos considerar um “paradoxo” clássico da estática de fluidos.

O que é um paradoxo? Embora alguns dicionários o definam como “opinião contrária ao senso comum” a definição mais aceite é que o **paradoxo** é uma ideia, conceito ou argumento que contém elementos de contradição.

Um verdadeiro paradoxo em Física é uma coisa muito séria. Se a correcta aplicação das leis da física à análise de uma situação conduzir a respostas contraditórias, essas leis são **inconsistentes**: a Natureza não é caprichosa e responde com um comportamento bem definido em cada situação que lhe colocamos.

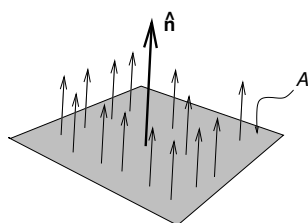


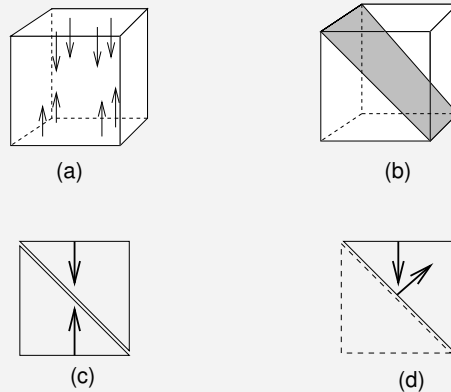
Figura 4.6: As forças de pressão são perpendiculares à superfície através da qual se exercem.

■ A pressão é um escalar ■

Será possível que num líquido existam apenas forças de pressão com uma dada direcção?

Se o cubo do painel (a) da figura for sólido, não há qualquer problema em tê-lo em equilíbrio com forças opostas na face superior e inferior apenas. Mas imaginemos que o cubo está cortado em dois pela superfície sombreada em (b). As duas metades do cubo deslizarão uma sobre a outra, sob a acção das forças externas representadas, (c). Podemos compreender porquê atentando no painel (d) em que representamos as forças sobre a metade de cima. Sem atrito, a força de reacção da parte de baixo é normal à superfície e não pode equilibrar a força na face superior. Se existissem forças compressivas perpendiculares às faces laterais iguais em módulo às forças nas faces superior e inferior o cubo ficaria em equilíbrio, mesmo cortado.

As diferentes camadas de um fluido podem sempre deslizar umas sobre as outras. Podemos imaginar o fluido “cortado” segundo qualquer direcção. Por isso, para um cubo fluido, o equilíbrio só é possível se houver forças de igual módulo em todas as faces. Um argumento semelhante permite provar que, num fluido em equilíbrio, o módulo das forças de pressão não depende da orientação da superfície em que se exercem.



Caixa 4.3: O módulo das forças de pressão não depende da orientação da superfície onde se exercem.

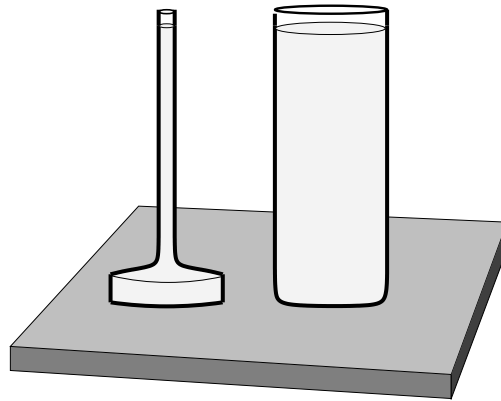


Figura 4.7: Paradoxo hidrostático: os dois recipientes tem a mesma área na base. Em qual deles é maior a pressão no fundo do recipiente?

Contudo, um raciocínio incorrecto sobre uma dada situação física, pode originar conclusões contraditórias. Se o erro for subtil, difícil de detectar, estamos perante um **paradoxo**. Que melhor maneira de melhorarmos a nossa compreensão de uma lei física, que a análise de um paradoxo?

A situação a analisar refere-se à figura 4.7 e a pergunta é muito simples:

Os dois recipientes da figura 4.7 têm a mesma área de base. Em qual deles é maior a pressão na base?

Ouçamos um pequeno diálogo entre os nossos dois amigos *P* e o seu tio Alberto, sobre esta questão.

Tio Alberto, de novo.

(P e o seu Tio Alberto estão frente a uma mesa com dois recipientes semelhantes aos da figura 4.7. O tio pergunta em qual dos recipientes é maior a pressão na base.)

P: *É óbvio que a pressão é maior no recipiente da direita!*

TA: *Porquê?*

P: *Porque o peso do líquido que a base suporta é maior. Se o peso é maior e a área da base a mesma, é óbvio que a pressão (peso a dividir por área) é maior!*

TA: *E então o princípio fundamental da hidrostática?*

P: *Então, o quê?*

TA: *Repara na coluna estreita de líquido do recipiente da esquerda. Com certeza te lembrás do teu manual de física que a pressão aumenta de ρgh quando descemos da superfície de uma distância h .*

P: *Concordo. Isso é necessário para suportar o peso da coluna de líquido acima.*

TA: *Mas então quando chegamos à base a pressão atmosférica é*

$$P_0 + \rho gl$$

em l é a altura de líquido no recipiente. Mas essa é exactamente a pressão no recipiente da direita!

P: *Ah, apanhei-te! Estás a esquecer um aspecto importante. Essa coluna tem uma base muito pequena. Por isso a pressão só tem esse valor na área da base correspondente à secção da coluna central do recipiente. No resto da base a pressão é apenas a necessária para suportar o peso de colunas de líquido muito menos altas que l . Ora aí está!*

TA: *Humm, isso não funciona!*

P: *Não funciona porquê?*

TA: *Estamos dizer que a pressão, na base, é maior no centro que na periferia, certo?*

P: *Certo.*

TA: *Ora, as forças de pressão tem o mesmo valor qualquer que seja a orientação da superfície em que se exercem. Considera então uma partícula de fluido, próxima da base, limitada por dois planos verticais. Eu mostro em esquema. Se a pressão é maior no eixo do recipiente do que na borda, a porção de fluido que sombrei, limitada pelo tracejado, fica sujeita a uma força com resultante para o exterior e não poderia estar em equilíbrio. Isto mostra que à mesma altura a pressão não pode variar.*

P: *Quer dizer então que a pressão em toda a base tem que ser*

$$P_0 + \rho gl?$$

TA: *Precisamente!*

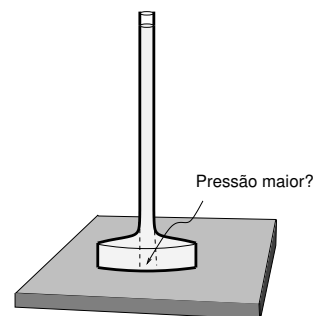


Figura 4.8: Será que a pressão é maior na base da coluna mais alta?

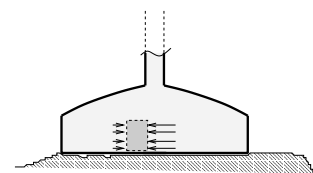


Figura 4.9: A porção de fluido sombreada não pode estar em equilíbrio se a pressão no centro for maior que na borda.

P: *Isso não pode ser! Ora vê: se a pressão em baixo é $P_0 + \rho gl$, a força sobre a base do recipiente é*

$$(P_0 + \rho gl) \times A = P_0 A + \rho gl A$$

em A é a área da base. Pelo princípio da acção e reacção este é o valor da força exercida pela base no líquido. Se eu subtrair a força na superfície exposta ao ar, $P_0 A'$, obtenho o módulo da resultante de forças de pressão sobre o líquido:

$$P_0(A - A') + \rho gl A.$$

*Só o segundo termo é igual ao peso de todo o líquido do **recipiente maior**. Mesmo que $A' = A$, e nota que $A' \ll A$, esta força seria, em módulo, muito maior que o peso do líquido no recipiente mais estreito!*

TA: *É verdade, mas isso tem uma explicação. Estás a esquecer uma coisa muito importante...*

\mathcal{ETV}_5 : O que é que P está a esquecer? Será que as forças de pressão no fundo do recipiente mais estreito ultrapassam largamente o que é necessário para suportar o peso do líquido? Como é isso possível?

4.3 Princípio de Pascal

O argumento do Tio Alberto usou o facto de que, sempre que a pressão varia no interior de um líquido, as forças de pressão sobre elementos do líquido têm resultante não nula na direcção da variação (fig. 4.10).

Na direcção vertical, a pressão varia: a resultante das forças de pressão sobre uma partícula de líquido anula o seu peso. Mas a pressão não pode variar na direcção horizontal, se o líquido estiver em equilíbrio.

Ou seja, entre dois pontos, A e B de um líquido de massa volúmica constante a diferença de pressão é sempre

$$P_A - P_B = -\rho g (h_A - h_B)$$

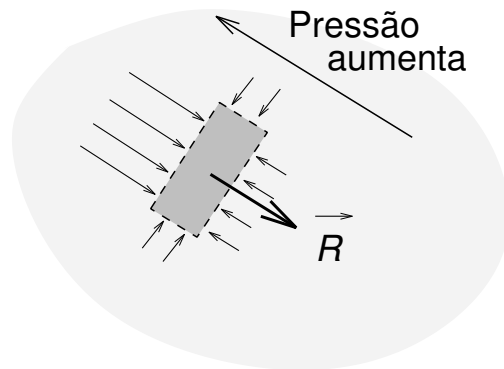


Figura 4.10: Se a pressão aumentar no sentido da seta, a resultante das forças de pressão no elemento sombreado, \vec{R} , não é nula e tem sentido oposto ao do aumento de pressão.

em que h_A e h_B são as **altitudes** dos dois pontos no campo gravítico (o sinal menos é preciso porque quanto mais alto estiver um ponto menor é a pressão)¹.

O **Princípio de Pascal**, formulado por Blaise Pascal, matemático, físico, filósofo e teólogo francês do século XVII, é uma consequência deste resultado:

O aumento de pressão num ponto de um líquido em repouso transmite-se uniformemente, sem diminuição, a todos os pontos do líquido.

▷ Princípio de Pascal

Com efeito se a diferença de pressões entre dois **quaisquer** pontos é fixa, aumentar a pressão num ponto do líquido aumenta igualmente em todos os outros.

Este princípio tem consequências divertidas. Entre as quais a possibilidade de levantar um carro com o dedo mindinho!

4.3.1 Máquinas hidráulicas.

Quando conduzimos um automóvel e carregamos no pedal do travão, esperamos que essa força seja transmitida aos calços dos travões de modo a que estes sejam comprimidos contra os discos das rodas e, por atrito, as façam parar de rodar. Mas essa força não

¹Atrás usámos h para designar **profundidade**. Se y for uma coordenada vertical de semi-eixo positivo ascendente, temos $P(y) = P(0) - \rho gy$.

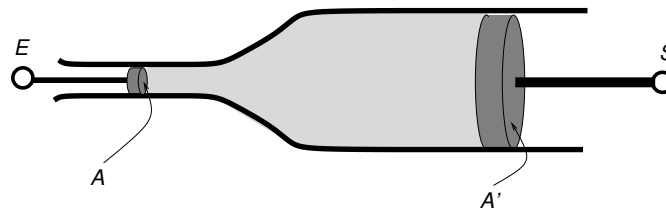


Figura 4.11: Princípio de amplificação hidráulica. Se empurrarmos com uma força de módulo F em E , a força exercida em S vale $F \times A'/A$.

é transmitida por cabos ou alavancas: é transmitida por um tubo cheio de fluido, o óleo dos travões.

O princípio de Pascal torna muito fácil a transmissão de forças: pressionamos numa extremidade de um tubo com líquido, e, na outra extremidade, a pressão aumenta exactamente do mesmo valor. Melhor ainda, podemos com relativa facilidade **amplificar** a força exercida.

Se exercermos um força de módulo 100 N (aproximadamente o peso de 10 kg) sobre um êmbolo de um tubo de secção de 10 cm^2 (10^{-3} m^2) preenchido com fluido, a pressão aumenta de um valor igual à pressão atmosférica, $\Delta P = 10^5\text{ Pa}$. Na outra extremidade a pressão aumenta do mesmo valor. Se a secção do tubo for de 1 m^2 a força correspondente será $F' = \Delta P \times 1 = 10^5\text{ N}$ (o peso de **10 toneladas!**). Este é o princípio de funcionamento de inúmeras máquinas hidráulicas, desde guias, escavadoras, prensas, travões de automóvel, controlo de *flaps* em aviões etc.

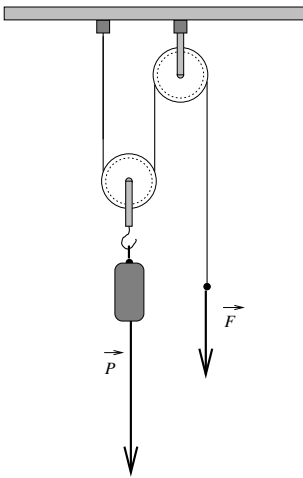


Figura 4.12: O módulo da força \vec{F} é metade do peso. Mas para elevar a carga de h , o ponto de aplicação de \vec{F} desloca-se de $2h$.

A amplificação de forças não é novidade. Já vimos no 10º ano que uma roldana móvel permitia reduzir de um factor de dois a força necessária para elevar um carga. Mas havia um preço a pagar: se o ponto de aplicação da força se deslocasse de um metro, a carga elevava-se apenas de meio metro. Ou seja, o trabalho requerido para elevar a carga não era alterado!

Também no caso das máquinas hidráulicas não há almoços grátis. Podemos ver isso na figura 4.11: se o ponto de aplicação da força em E se deslocar de d , deslocamos um volume de fluido de $d \times A$. Para que o volume do fluido se mantenha (estamos a supô-lo incompressível), o êmbolo maior desloca-se uma distância d' , tal que $d'A' = dA$. Isto é,

$$d' = \frac{A}{A'} \times d.$$

Então,

$$F' \times d' = \left(F \times \frac{A'}{A} \right) \times \left(d \times \frac{A}{A'} \right) = F \times d.$$

Não há amplificação do trabalho realizado: a energia que transferimos para o êmbolo em E é a que obtemos em S .

4.4 Forças de impulsão

4.4.1 Um quebra-cabeças

Um barco flutua numa piscina com uma pedra dentro. Se a pedra for atirada à água e se afundar, o nível da água sobe, desce ou fica na mesma?

Não é difícil emitir opiniões sobre esta questão. Contudo, a resposta exige compreensão do problema da flutuação em líquidos, o assunto desta secção.

É evidente que, se uma rolha flutua na água, deve existir sobre a mesma uma força de sentido vertical ascendente que cancele o seu peso: a força de impulsão.

A existência de uma força de impulsão, de sentido oposto ao peso, em qualquer corpo imerso num líquido já era conhecida do físico grego Arquimedes, que segundo a lenda, terá feito esta descoberta no banho ao reparar na sua aparente falta de peso. Arquimedes descobriu mesmo a forma quantitativa da força de impulsão, conhecida por **Princípio de Arquimedes**:

A força de impulsão sobre um corpo imerso, parcial ou totalmente, num líquido é igual ao peso do volume de líquido deslocado pelo corpo.

Para um corpo totalmente imerso, a força de impulsão é o peso de um volume de água igual ao volume total do corpo:

$$I = \rho_{\text{água}} \times V \times g$$

O peso do corpo, por outro lado, é

$$p = \rho_{\text{corpo}} \times V \times g$$

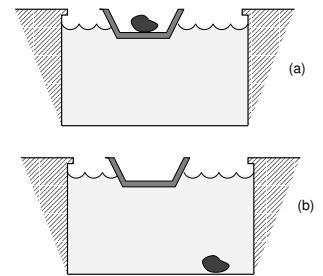


Figura 4.13: Se a pedra for atirada à água, o nível de água da piscina sobe ou desce?

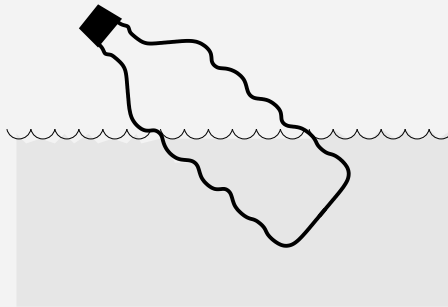
▷ Princípio de Arquimedes

■ Princípio de Arquimedes em casa ■

Na Actividade 4.2 propõe-se uma verificação cuidada e precisa do Princípio de Arquimedes. Com um garrafa de plástico transparente é possível uma demonstração muito rápida deste princípio, sem qualquer medição.

Um garrafa vazia tem um peso muito menor do que se estiver cheia de água e flutua quase à superfície.

Se colocarmos alguma areia ou granalha na garrafa o volume imerso aumenta. O volume imerso só deve depender do peso da substância que colocamos dentro da garrafa, não da sua natureza. E se colocarmos água? O que diz o Princípio de Arquimedes? Que relação deve haver entre o volume imerso e o volume de água **dentro da garrafa** (se pudermos desprezar o peso da garrafa vazia)?



Se o peso da garrafa puder ser desprezado, qual é a relação entre os níveis de água dentro e fora da garrafa?

Caixa 4.4: Demonstração simples do Princípio de Arquimedes.

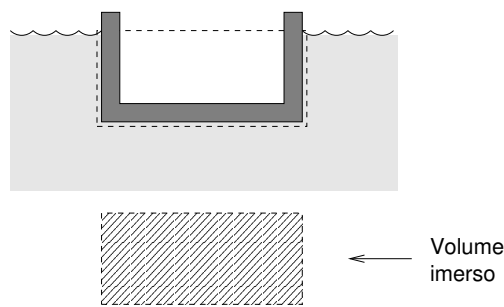


Figura 4.14: Um corpo feito de um material mais denso que a água pode flutuar se a sua forma permitir um volume imerso superior ao volume efectivamente ocupado pelo material denso.

Para corpos mais densos que a água (mais denso = maior massa volúmica), $p > I$: o corpo afunda-se. Por outro lado, para corpos menos densos, $p < I$ **se o corpo estiver totalmente imerso**. O corpo sobe até a superfície e o seu volume imerso diminui. A impulsão passa a ser dada por

$$I = \rho_{\text{água}} \times V_{\text{imerso}} \times g$$

O peso continua a ser determinado pelo volume total do corpo. O volume imerso diminui até que o peso e a impulsão sejam iguais.

Contudo, barcos feitos de ferro e aço, materiais mais densos que a água, flutuam. Como? A sua forma permite que o volume de líquido deslocado seja muito superior ao volume efectivamente ocupado pelos materiais mais densos: a maior parte do volume de líquido que um barco desloca é ocupado por ar, não por aço e ferro. Em qualquer caso, a condição de equilíbrio na flutuação é sempre:

$$\text{peso do corpo} = \rho_{\text{água}} \times V_{\text{imerso}} \times g.$$

\mathcal{ETV}_6 : Que força precisa de exercer uma grua para elevar um cubo de cimento de 0,5m de lado do fundo de um rio? ($\rho_{\text{água}} = 10^3 \text{ kg m}^{-3}$; $\rho_{\text{cim}} = 2,4 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$).

4.4.2 Forças de pressão e princípio de Arquimedes

À primeira vista poderia pensar-se que temos que adicionar às forças de pressão exercidas na superfície de um sólido imerso num

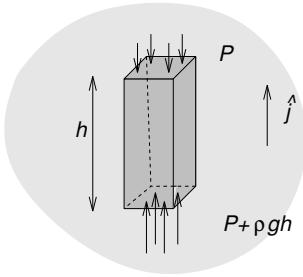


Figura 4.15: A resultante das forças de pressão é a força de impulsão.

líquido a força de impulsão. Na realidade, a força de impulsão é a resultante das forças de pressão na presença de um campo gravítico.

A pressão aumenta com a profundidade do líquido, como vimos atrás. Logo, na base de um corpo imerso a pressão é maior que no seu topo. A resultante terá o sentido de baixo para cima: a força de impulsão.

Vejamos o que acontece no caso de um corpo com a forma de prisma de altura h e área de base A . Se for P a pressão do líquido na sua face superior, a resultante das forças de pressão nessa face é

$$\vec{F}_1 = -(P \times A)\hat{\mathbf{j}}.$$

Na face inferior a pressão é $P + \rho gh$, em que ρ é a massa volúmica do líquido. A resultante das forças de pressão na base é

$$\vec{F}_2 = (P + \rho gh)A\hat{\mathbf{j}}.$$

As forças sobre as faces laterais não têm componente segundo a direcção vertical e, mais a mais, cancelam-se em faces opostas. A resultante das forças de pressão é

$$\vec{I} = \rho ghA\hat{\mathbf{j}}.$$

Como Ah é o volume do prisma, ρghA é o peso de um volume de líquido igual ao volume do prisma e \vec{I} é a força de impulsão.

Um corpo de forma irregular pode imaginar-se dividido em pequenos prismas a cada uma dos quais podemos aplicar o mesmo argumento. A soma das forças de impulsão será:

$$\begin{aligned}\vec{I} &= \rho g(h_1A_1 + h_2A_2 \dots)\hat{\mathbf{j}} \\ &= \rho gV\hat{\mathbf{j}}\end{aligned}$$

em que $V = h_1A_1 + h_2A_2 \dots$, a soma dos volumes dos prismas é o volume do corpo. Re-obtemos assim o princípio de Arquimedes.

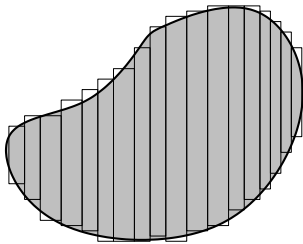


Figura 4.16: Um corpo com forma tão irregular como uma batata pode imaginar-se cortado em fatias prismáticas para calcular a força de impulsão total.

$\mathcal{E}TV_7$: Podemos imaginar no líquido um prisma feito do próprio líquido. Quanto vale a força de impulsão nesse prisma? Como se compara com o seu peso?

4.4.3 Resposta ao quebra-cabeças

Voltemos agora ao quebra-cabeças da página 4.4.1, com que iniciámos a discussão sobre impulsão. Qual é a resposta?

O nível da água desce!

Podemos chegar a esta conclusão da seguinte maneira.

Qual é o volume imerso, V_1 , quando a pedra está dentro do barco? O princípio de Arquimedes afirma que **é o volume de água cujo peso é igual ao peso do barco mais o peso da pedra.**

$$\begin{aligned} V_1 &= \text{volume de água de peso igual ao do barco} \\ &+ \text{volume de água de peso igual ao da pedra.} \end{aligned}$$

Qual é o volume imerso, V_2 , quando a pedra está fora do barco?

O barco continua a flutuar e, por isso, desloca um volume de água cujo o peso é o peso do barco. A este volume temos que somar o **volume da pedra** no fundo da piscina.

$$\begin{aligned} V_2 &= \text{volume de água de peso igual ao do barco} \\ &+ \text{volume da pedra} \end{aligned}$$

Ou seja, a diferença de volumes imersos nas duas situações, $V_1 - V_2$, é:

$$\begin{aligned} V_1 - V_2 &= \text{volume de água com peso igual ao da pedra} \\ &- \text{volume da pedra} \end{aligned}$$

Ora, a pedra é mais densa que a água, o que significa que

volume de água com peso igual ao da pedra $>$ volume da pedra

e $V_1 > V_2$. Como o volume imerso (abaixo da superfície da água) é menor quando a pedra está no fundo, o nível da água desce (para ocupar o volume libertado).

4.5 No vazio explodimos?

Qual é a área do corpo humano?

Se substituirmos um homem por um cilindro de perímetro cerca de 1 m e altura 1,75 m. Isto dá uma área de 1,75 m². Provavelmente

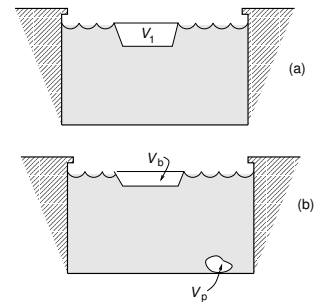


Figura 4.17: Se o volume ocupado pelo barco com a pedra, V_1 for superior ao volume ocupado pelo barco, V_b , mais o volume da pedra, V_p , o nível da água desce.

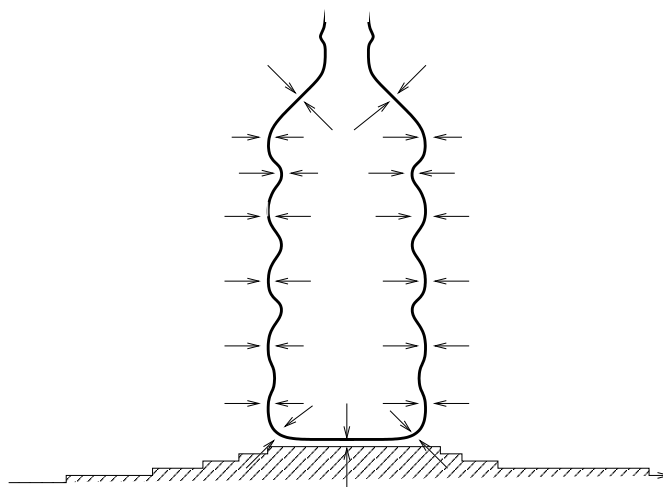


Figura 4.18: A garrafa não fica esalmada pela pressão do ar no exterior, porque a pressão no interior é igual à exterior. Mas a parede da garrafa é comprimida nas duas faces (interna e externa) por forças da ordem de 10 N cm^{-2} .

será um pouco maior porque os braços e as pernas não estão colados ao corpo. Para o efeito tanto faz. Serão dois a três metros quadrados.² Multiplicando esta área pela pressão atmosférica obtemos uma força total de $2 \sim 3 \times 10^5 \text{ N}$. Um humano de 70 kg pesa apenas cerca de 700 N (mg , $g \approx 10 \text{ m s}^{-2}$).

A razão porque não somos esmagados por esta força tremenda é que nascemos para viver nesta atmosfera. O ar nos nossos pulmões está quase à mesma pressão, assim como muito dos fluidos que formam nosso corpo. A pressão exterior da atmosfera e a pressão interior dos fluidos do nosso corpo quase se cancelam: não sentimos a pressão atmosférica como uma força opressiva que nos tenta esmagar.

A seguinte analogia pode ser útil para compreender melhor estes factos. Em vez do corpo humano, pensemos numa garrafa de plástico de água ou de refrigerante. A água ou o ar no seu interior e o ar no exterior estão à mesma pressão. Por isso a garrafa não fica esalmada. Mas o plástico da parede da garrafa está, efectivamente, comprimido por uma força dirigida para dentro na sua

²Este tipo de cálculo, muito aproximado, chama-se **estimativa**. O objectivo é obter uma ideia da ordem de grandeza, não um valor muito preciso. Uma costureira usa, em geral, tecidos de $1,5 \text{ m}$ de largura e gasta um comprimento igual à altura do vestido mais a altura de manga. Para um modelo de $1,75 \text{ cm}$ isto dá uma área de tecido de cerca de $(1,75 + 0,5) \times 1,5 \approx 3,4 \text{ m}^2$.

face exterior e uma força dirigida para fora na face interior. É uma força de 10^5 N m^{-2} ou seja 10 N cm^{-2} . Dez Newton é o peso de uma massa de 1 kg. Quando a parede de plástico foi feita já estava debaixo desta compressão. Seja como for, não é uma pressão excessiva. Uma massa de 1 kg, pousada em cima de um rectângulo de plástico de um centímetro de lado não o esmaga significativamente.

Tudo bem, não somos esmagados pela pressão atmosférica porque as pressões internas e externas estão equilibradas. E se formos de repente colocados no vazio? Explodimos?

No filme *2001 Odisseia no Espaço* o astronauta Dave Bowman dá um curto passeio no espaço sem capacete, sem graves consequências. Tolice do autor do argumento, Arthur C. Clark?

De facto, não explodimos. Clark tinha razão!

O perigo maior reside em tentar reter o ar nos pulmões. Nessa altura o ar dos pulmões expande-se rapidamente, com destruição dos tecidos e a morte é imediata. É o que acontece à garrafa se contiver ar e estiver fechada. A pressão interior fá-la “explodir”, porque deixam de estar compensadas pela pressão exterior. No entanto, se a garrafa estiver aberta, o ar é removido do interior pela abertura. Se estiver cheia de água, também não “explode” porque o volume ocupado pela água, mesmo a pressão nula, não é muito maior do que à pressão atmosférica: a água é quase incompressível.

No caso do corpo, se as vias respiratórias estiverem desobstruídas, de modo a que os pulmões se possam esvaziar, não se espera qualquer explosão. A NASA estima que é possível estar no vácuo até cerca de meio minuto sem danos de saúde permanentes. Por isso, as imagens dos filmes em que o astronauta explode dentro do fato depressurizado são fantasia e má ciência³.

4.6 Repostas aos \mathcal{ETVs}

4.1. \mathcal{ETV}_1 :

$$(a) \quad F = 40 \times g = 392 \text{ N.}$$

³Num acidente, num centro de treinos da NASA em 1965, um homem foi exposto a um quase vácuo. Esteve consciente durante 14 segundos e a repressurização do facto começou ao fim de 15 segundos. Não sofreu danos permanentes. A última coisa que se lembra, antes de perder a consciência, foi de sentir a saliva ferver na língua!

(b)

$$F = P \times 300 \times 10^{-4} = (40g / (2200 \times 10^{-4})) \times 3 \times 10^{-2} = 53 \text{ N.}$$

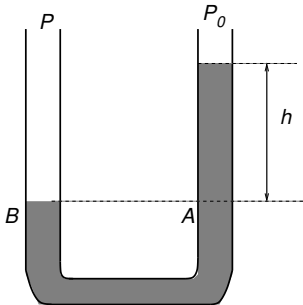


Figura 4.19: As pressões em A e B devem ser iguais.

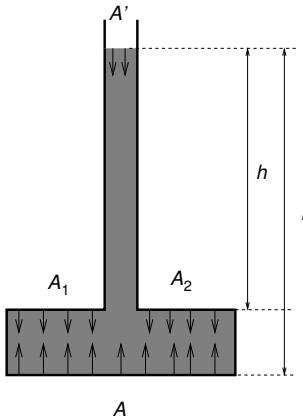


Figura 4.20: As superfícies A_1 e A_2 exercem forças verticais no fluido.

4.2. \mathcal{ETV}_2 :

$$F = 10^5 \times (25 \times 16) = 4 \times 10^7 \text{ N.}$$

4.3. \mathcal{ETV}_3 : para que o aumento de pressão seja igual à pressão atmosférica,

$$\rho gh = P_0 = 10^5 \text{ Pa.}$$

Logo,

$$h = \frac{10^5}{10^3 \times 9,8} = 10,2 \text{ m.}$$

4.4. \mathcal{ETV}_4 : para que o fluido que está abaixo da linha a tracejado na figura 4.19 esteja em equilíbrio, é necessário que as pressões em A e B sejam iguais. A pressão em A é $P_0 + \rho gh$ e em B é P . Logo $P = P_0 + \rho gh$.4.5. \mathcal{ETV}_5 : Enquanto que no recipiente mais largo as únicas forças de pressão com componente vertical são exercidas na base e no topo do recipiente, no recipiente mais estreito isso não é verdade. \mathbf{P} esqueceu-se que as paredes do recipiente mais pequeno não são verticais. Logo, as forças de pressão respectivas têm componentes verticais. Partes das paredes do recipiente mais estreito empurram o líquido **para baixo**. As forças exercidas pelas superfícies A_1 e A_2 valem:

$$(P_0 + \rho gh) \times (A_1 + A_2)$$

com sentido descendente. A força vertical exercida pelas paredes do recipiente e pelo ar vale

$$(P_0 + \rho gl)A - P_0 A' - (P_0 + \rho gh) \times (A_1 + A_2) = P_0(A - A' - A_1 - A_2) + \rho glA - \rho gh(A_1 + A_2)$$

O primeiro termo é nulo, pois $A = A_1 + A' + A_2$. O segundo e terceiro termo dão o peso total de líquido do recipiente, pois o volume é $lA - h(A_1 + A_2)$.4.6. \mathcal{ETV}_6 : O peso do cubo é

$$p = \rho_{\text{cim}} \times (0,5)^3 g = 2,4 \times 10^3 \times 0,125 \times g = 2940 \text{ N}$$

O peso do mesmo volume de água é a força de impulsão

$$I = \rho_{\text{agua}} \times (0,5)^3 g = 1225 \text{ N}$$

A força necessária para erguer o cubo **enquanto estiver totalmente imerso** é

$$F = p - I = 1715 \text{ N.}$$

- 4.7. *ETV*₇: A impulsão num prisma de líquido é igual ao peso do volume de líquido que esse prisma ocupa: ou seja, é igual ao respectivo peso! Este resultado é óbvio: essa é a condição de equilíbrio que usámos para chegar à lei fundamental da hidrostática. O princípio de Arquimedes, é consequência dessa lei.

4.7 Actividades, Questões e Problemas

4.7.1 Actividades

4.1. Direcção das forças de pressão

Fazer a experiência descrita na Caixa 4.1 da página 92. Só é preciso uma garrafa de plástico e um pionés!

4.2. Variação de pressão com profundidade

Ver ficha de Actividade A37.

4.3. Princípio de Arquimedes

Ver ficha de Actividade A38.

4.7.2 Questões

- 4.1. Um cilindro de aço de raio da base de 3 cm e altura 20 cm exerce maior pressão numa mesa rígida de pé, sobre a base, ou deitado de lado?
- 4.2. A figura 4.21 ao lado representa um recipiente com dois líquidos imiscíveis de diferentes densidades. Que aspecto teria uma representação gráfica da pressão em função da profundidade neste recipiente?
- 4.3. Um jovem biólogo, com gosto pela Física, precisava de uma medida rápida da massa volúmica de um óleo. Usando um tubo em U verteu um pouco de água no tubo e, depois, algum óleo num dos braços do tubo. Com uma régua fez duas medições e conseguiu determinar a massa volúmica do óleo relativamente à da água.
- (a) Que medições fez e como é que isso lhe permitiu conhecer a massa volúmica do óleo?
- 4.4. No texto mostra-se que o funcionamento de máquinas hidráulicas permite a amplificação de forças, embora não viole

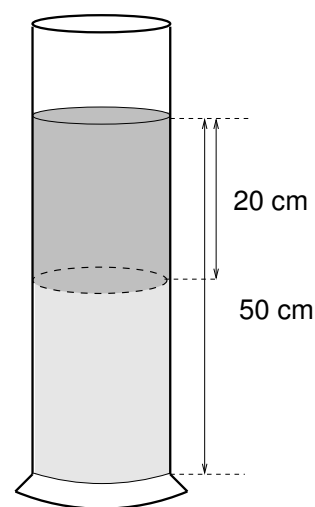


Figura 4.21: Como varia a pressão com a profundidade?

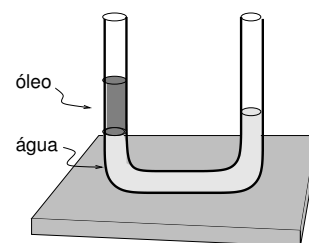


Figura 4.22: Um maneira de medir densidades relativas.

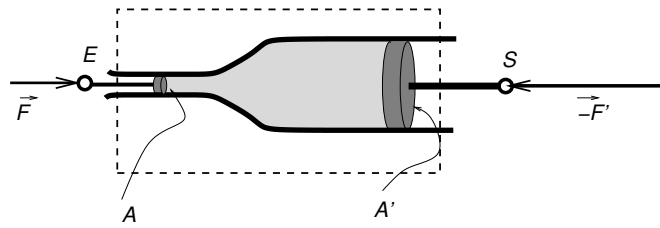


Figura 4.23: Se a força \vec{F} em E dá origem a uma força \vec{F}' em S com módulo maior de um factor A'/A , o sistema representado estaria em equilíbrio. Como é isso possível se a resultante das forças aplicadas não é nula?

a conservação de energia. Mas considere-se o sistema da figura 4.23. Se é verdade que uma força de módulo F em E dá origem a uma força muito maior em S , $F' = FA'/A$, o sistema representado deverá estar em equilíbrio. Como é que isso é possível, se a resultante não é nula? Que força falta no balanço?

- 4.5. Um petroleiro de 30 mil toneladas, sai carregado de um porto. Qual é o volume que ocupa abaixo da linha de água?
- 4.6. A força de impulsão da água sobre uma rolha de cortiça é a mesma na Terra e na Lua? E o volume imerso da rolha? Porquê?
- 4.7. Quando o gelo num copo de água funde, o nível da água sobe, desce ou mantém-se? Porquê?
- 4.8. Se a pressão aumenta com a profundidade, por que é que a força de impulsão não varia?
- 4.9. Um estudante, depois de estudar o princípio de Arquimedes, exclamou: “Eureka! Descobri uma maneira de produzir energia de graça”. O esquema que propôs está esquematizado na figura 4.24. Cargas de cortiça descem lentamente por um poço feito ao lado de um lago ou rio profundo. Por cada 100 kg que descem 50 m, obtemos uma energia

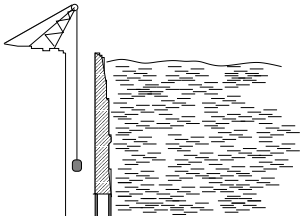


Figura 4.24: Uma máquina de fazer energia?

$$E = mgh \approx 50\,000 \text{ J.}$$

No fundo do poço existe uma sala com duas comportas que usamos para introduzir a cortiça na água. Depois deixamo-la flutuar livremente até a superfície. Bingo! Volta a descer e são mais 50 000 J. E assim sucessivamente!

- (a) De que é que o estudante se esqueceu?
- (b) Mostrar que a energia necessária para esvaziar de novo a sala das comportas é suficiente para invalidar todo o esquema!
- 4.10. Quando um corpo de massa m varia a sua altura de Δh no campo gravítico da Terra a sua energia potencial varia de $\Delta E_p = mg\Delta h$.
- (a) Se o corpo estiver no interior de um fluido, a variação de energia potencial gravítica do sistema corpo mais fluido é $\Delta E_p = mg\Delta h$ ou $\Delta E_p = (mg - I)\Delta h$, em que I é a impulsão?
- (b) Se a massa volúmica do corpo for inferior à do líquido, a energia potencial gravítica do sistema aumenta ou diminui quando o corpo sobe?

4.7.3 Problemas

- 4.1. A figura 4.25 mostra uma variante da experiência das esferas de Magdeburgo (página 94), distribuída por alguns fabricantes de equipamento didáctico. Duas caixas cilíndricas são encostadas uma à outra de modo a formar uma cavidade de onde é extraído o ar. Se o raio da base for $r = 5$ cm a e pressão no interior for um quarto da pressão atmosférica, que força será necessário exercer em cada semi-cilindro para os conseguir separar? ($P_0 = 10^5$ Pa).
- 4.2. Na experiência das esferas de Magdeburgo, a força necessária para separar os hemisférios é igual à resultante das forças de pressão sobre um deles. Mas as forças de pressão não têm uma direcção fixa já que são sempre perpendiculares à superfície da esfera. Como calcular então a resultante das forças de pressão sobre metade de uma esfera?
- (a) Se substituirmos um dos hemisférios por uma tampa plana (diâmetro de 51 cm), qual é a resultante das forças de pressão sobre a tampa?
- (b) Que força seria necessária para separar as esferas da experiência de Magdeburgo?
- 4.3. Um prisma de base rectangular feito de madeira maciça, flutua com $4/5$ da sua aresta vertical debaixo da linha de água. Qual é a massa volúmica da madeira?

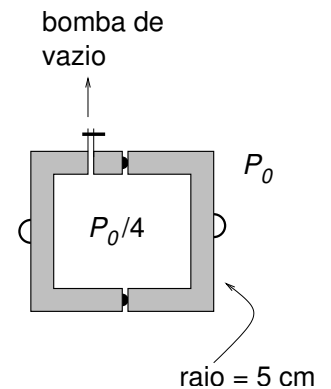


Figura 4.25: Que força é necessária para separar os cilindros?

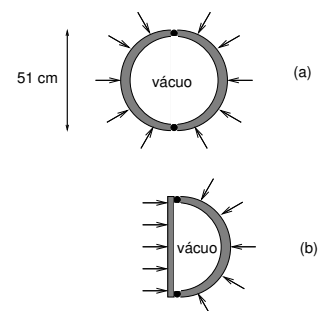


Figura 4.26: Qual é a resultante das forças de pressão numa semi-esfera?

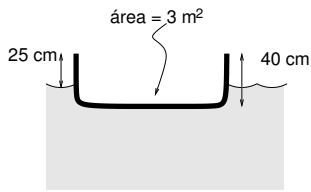


Figura 4.27: Quanto pesa a barcaça?

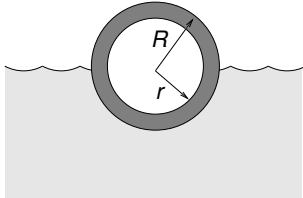


Figura 4.28: Qual é a espessura da parede da esfera?

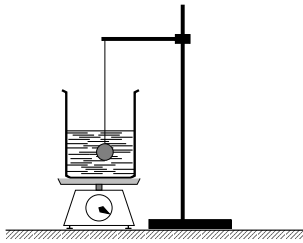


Figura 4.29: Qual é indicação da balança?

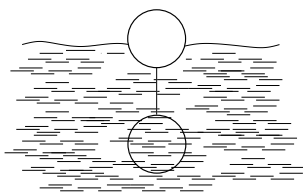


Figura 4.30: Se a bola de baixo estiver cheia de água, a de cima flutua?

- 4.4. Uma barcaça com área de base 3 m^2 e com bordos de 40 cm de altura flutua em água. Quando está vazia, a linha de água fica a 25 cm do bordo superior.
- Quanto pesa a barcaça vazia?
 - Qual é a carga máxima que pode transportar sem se afundar?
- 4.5. Um esfera de ferro, oca, flutua em água ficando exactamente metade do seu volume imerso. O raio exterior da esfera é de 30 cm . Qual é o raio interior r ? ($\rho_{\text{Fe}} = 8,9 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$).
- 4.6. Um corpo humano tem um volume imerso em água que é quase 100% do total. Que nos diz isso sobre a massa volúmica média do corpo? Estimar o volume de um adulto de 80 kg .
- 4.7. Uma bola de futebol tem uma circunferência de 69 cm e uma massa de 430 g . É largada do fundo de uma piscina com 2 m de profundidade. Se as únicas forças sobre a bola fossem a impulsão e o peso:
- quanto tempo demoraria a chegar à superfície?
 - Com que velocidade chegaria?
- 4.8. A esfera de ferro da figura 4.29 tem uma massa de 500 g . Antes de ser mergulhada na água a balança indicava 300 g ($\rho_{\text{Fe}} = 8,9 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$).
- Quanto indica agora? Qual é a tensão do fio?
 - Se o fio for cortado e a esfera pousar no fundo do goblé, quanto passa a indicar a balança?
- 4.9. Uma bola de ténis de mesa (ping-pong) tem um diâmetro de $3,81 \text{ cm}$ e uma massa de $2,8 \text{ g}$. O material de que é feita a bola tem uma massa volúmica duas vezes superior à da água.
- Que fracção do seu volume fica imersa quando flutua em água?
 - Que força é necessária para a submergir completamente?
 - Duas bolas de ping-pong estão amarradas por um fio, mas uma está completamente cheia de água. A de cima flutua? Que força é exercida sobre o fio?

Capítulo 5

Fluidos em movimento

5.1 Velocidade num fluido

Se olharmos para as folhas que flutuam nas águas de um rio ou ribeiro, notamos que elas se deslocam com maior velocidade no centro do mesmo do que nas margens. Por vezes, junto à margem, podemos até vê-las a deslocar-se no sentido oposto da corrente do rio.

Num sólido rígido, não deformável, as distâncias entre diferentes pontos do mesmo são fixas. Por isso é relativamente simples caracterizar o seu deslocamento. Se o sólido se movimentar sem rotação, todos os seus pontos têm o mesmo deslocamento. Em cada instante, uma única velocidade, $\vec{v}(t)$, define o estado de movimento do corpo, porque **todos** os pontos do corpo têm a mesma velocidade (fig. 5.1).

Num fluido não temos esta simplificação. Cada ponto do fluido pode ter uma velocidade diferente. Mas o que é **um ponto do fluido**?

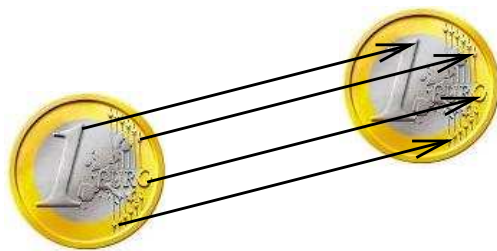


Figura 5.1: No movimento de translação da moeda todos os pontos têm o mesmo deslocamento.

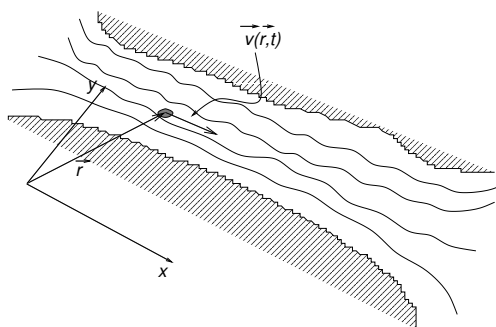


Figura 5.2: A velocidade $\vec{v}(\vec{r}, t)$ é a velocidade da partícula de fluido que está em \vec{r} no instante t .

Se olharmos para uma dada posição \vec{r} no interior do fluido, podemos imaginar que marcamos um pequeno volume do mesmo (tão pequeno quanto desejarmos) à volta de \vec{r} . Registrando o movimento dessa **partícula de fluido**, podemos em princípio determinar a sua velocidade.

Vejamos alguns exemplos de como poderíamos na prática realizar esta medição.

Se estivéssemos interessados nas velocidade à superfície de um rio, bastava-nos pousar uma pequena rolha (pequena para não perturbar o movimento do rio) e filmar o seu movimento. Pousando rolhas em posições diferentes do rio obteríamos, em geral, velocidades diferentes em cada posição.

A medição da velocidade do vento pode ser feita com um anemómetro. A figura 5.3 ilustra dois tipos de anemómetros. No primeiro caso o vento faz rodar os três copos montados num eixo de rotação vertical. Quanto maior for a velocidade do vento, maior será a velocidade de rotação do anemómetro; a direcção do vento não é determinada por este tipo de dispositivo. No segundo caso o vento faz rodar uma turbina muito leve, com eixo horizontal. Este tipo de anemómetro mede a componente da velocidade segundo a direcção do eixo da turbina.

O importante é que a indicação de cada dispositivo pode variar no tempo e depender do local onde estiver colocado. Ou seja, para caracterizar o movimento do fluido (no caso de fluidos designa-se muitas vezes por **escoamento**) devemos conhecer em cada instante, t , e cada posição no fluido, \vec{r} , a velocidade, $\vec{v}(\vec{r}, t)$.



Figura 5.3: Dois tipos de anemómetro

5.1.1 O conceito de campo

Durante o boletim meteorológico são dadas as temperaturas máximas e mínimas das cidades mais importantes do país. A temperatura atmosférica, T , varia no tempo, ao longo do dia, e de local para local. Uma caracterização completa do estado da temperatura implicaria conhecer, para cada posição \vec{r} no território português e cada instante t de um dia, o valor da temperatura correspondente $T(\vec{r}, t)$. Este é um exemplo de um **campo** de temperaturas. Em Física chamamos **campo** a qualquer grandeza definida em todos os pontos de uma dada região do espaço. De um modo geral os campos variam também no tempo.

O movimento de um fluido é caracterizado por um campo de velocidades, $\vec{v}(\vec{r}, t)$. Na figura 5.4 da página 118 damos um exemplo de representação gráfica de um escoamento: trata-se do escoamento de um fluido à volta de uma esfera sólida fixa¹. Cada seta da figura representa o vector velocidade do ponto onde tem origem. Esta figura mostra que a velocidade do fluido é muito pequena próximo da esfera (de facto a velocidade anula-se na superfície da esfera). O objectivo principal da disciplina de Dinâmica de Fluidos é precisamente a determinação dos campos de velocidades em circunstâncias variadas.

¹Este escoamento particular pode ser calculado exactamente; chama-se escoamento de Stokes. Contudo, só se observa para velocidades do fluido muito baixas. Para velocidades mais elevadas o campo de velocidades torna-se muito mais complicado.

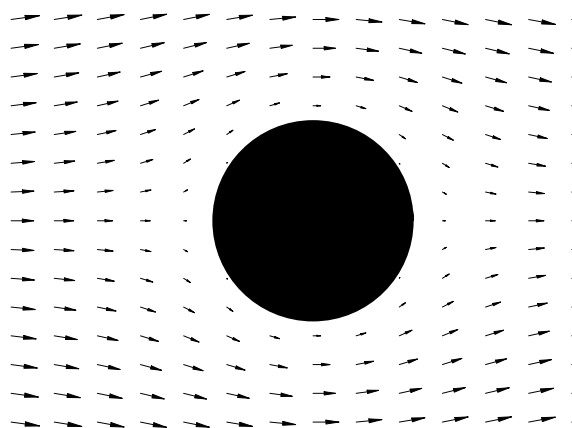


Figura 5.4: Um exemplo de escoamento de um fluido em torno de uma esfera. Cada seta representa o vector velocidade do ponto onde tem origem. Note-se como o fluido circula à volta da esfera e tem velocidade muito pequena junto dela.

\mathcal{ETV}_1 : Na figura 5.4 tomemos o eixo Ox como horizontal, passando pelo centro da esfera.

- a) Fazer uma representação gráfica esquemática da componente v_x da velocidade em função da coordenada x para $y = 0$ (ao longo do eixo Ox). Quanto vale v_y neste eixo?
- b) Fazer uma representação gráfica esquemática da componente v_y da velocidade em função de x para um valor de y fixo, ligeiramente superior ao raio da esfera (ao longo de uma linha paralela a Ox).

A figura 5.5 mostra uma outra representação do mesmo campo de velocidades usando linhas de corrente. As linhas de corrente são linhas tangentes ao vector velocidade em cada ponto. A trajectória de uma partícula do fluido também é tangente à sua velocidade em cada instante. Poderíamos então pensar que as linhas de corrente são trajectórias de partículas de fluido. De facto, à vezes são, outras vezes não. Vejamos porquê.

As figuras 5.4 e 5.5, representam como que um instantâneo, uma

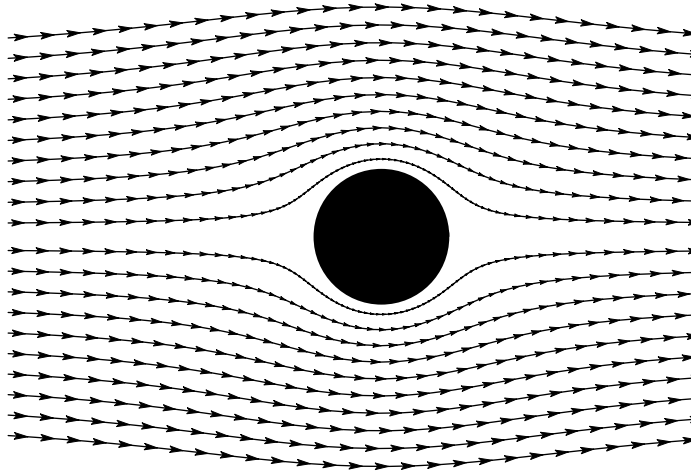


Figura 5.5: Uma representação do campo de velocidades com linhas de corrente.

“fotografia” do campo de velocidades, num dado instante. Se o campo de velocidades variar no tempo, as linhas de corrente variam também e nesse caso não coincidem com as trajectórias das partículas de fluido.

O exemplo do torniquete usado em rega é esclarecedor. O escoamento da água num tubo dobrado fá-lo girar em torno de um eixo vertical. As linhas de corrente estão naturalmente confinadas ao interior do tubo em cada instante. Mas este roda e, portanto, as linhas de corrente variam no tempo. Como se vê na figura 5.6 da página 120, uma partícula de fluido, que se move para o exterior à medida que o tubo roda, desenha uma trajectória que não coincide com nenhuma linha de corrente.

Contudo, no caso de escoamentos que não dependem do tempo, $\vec{v}(\vec{r}, t) \rightarrow \vec{v}(\vec{r})$, **escoamentos estacionários**, as partículas de fluido deslocam-se sempre ao longo da mesma linha de corrente e as trajectórias coincidem, de facto, com as linhas de corrente. A animação `stokes_anim.gif`, disponível no portal do Faraday, ilustra este facto.

▷ Actividade 5.1

Em resumo:

as linhas de corrente são, em cada ponto tangentes à velocidade do fluido, e no caso de escoamentos que não dependem do tempo, coincidem com as trajectórias de partículas do fluido.

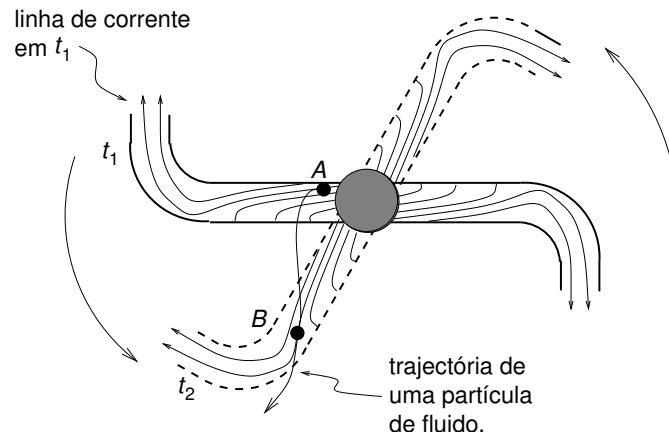


Figura 5.6: As linhas de corrente em t_1 e t_2 não são as mesmas porque o torniquete roda. Uma partícula de fluido tem uma trajetória tangente a uma linha de corrente em t_1 e a **outra** linha de corrente em t_2 .

$\mathcal{E}TV_2$: As linhas de corrente de um escoamento nunca se cruzam.

- Porquê? Qual seria a velocidade do fluido no ponto de cruzamento?
- Duas linhas de corrente relativas a instantes de tempo diferentes podem cruzar-se?

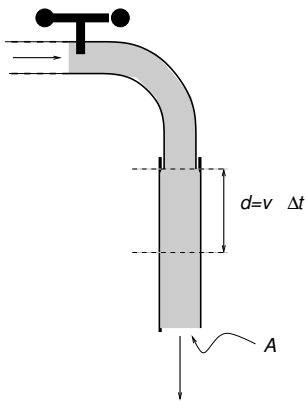


Figura 5.7: Num intervalo de tempo Δt , a torneira injeta na mangueira um cilindro de água de altura $v\Delta t$.

5.2 Teorema de Bernoulli

5.2.1 Caudal e velocidade

Quando queremos que a água saia com mais velocidade² de uma mangueira, tapamos parte da saída. Porquê?

Suponhamos que a velocidade da água à saída da torneira (com mangueira) é $v = 2 \text{ m s}^{-1}$ e que o diâmetro da torneira é $d = 2 \text{ cm}$. Que volume de água sai da torneira por segundo?

²Mais velocidade e não mais “força” como habitualmente dizemos!

Num segundo a torneira injecta na mangueira um cilindro de água de altura 2 m e diâmetro de base 2 cm. Ou seja, o volume de água por segundo, o **caudal**, é

$$Q = v \times A = v\pi \frac{d^2}{4} = 6,3 \times 10^{-4} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1},$$

em que A é área da secção da torneira. Como a mangueira está cheia de água e a água é praticamente incompressível, tem que sair exactamente o mesmo caudal pela outra extremidade. Assim, se for A' a área da abertura de saída da mangueira,

$$Q = v' \times A' = v \times A = 6,3 \times 10^{-4} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}.$$

Se A' for menor que A , a velocidade v' será maior:

$$v' = v \times \frac{A}{A'}.$$

Se reduzirmos a área a metade, a velocidade de saída dobra e assim sucessivamente. É também por esta razão que os rios fluem calmamente em regiões onde o leito é largo e espaçoso, e muito mais rapidamente nos estreitamentos.

$\mathcal{E}\mathcal{T}\mathcal{V}_3$: Uma torneira de diâmetro 2 cm enche um balde de 10 litros em 45 s. Com que velocidade é que a água emerge da torneira?

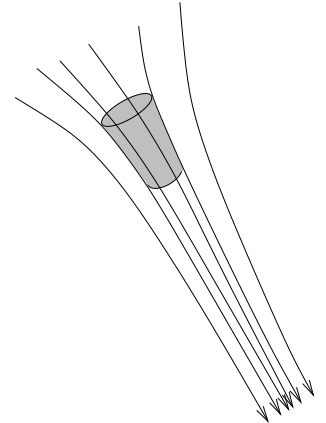


Figura 5.8: O fluido marcado a sombreado mantém-se dentro do mesmo tubo de linhas de corrente.

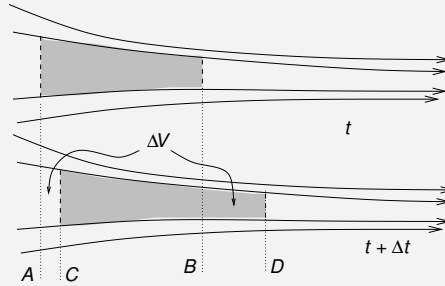
▷ Actividade 5.1

5.2.2 Velocidade e linhas de corrente

Se pensarmos em termos de linhas de corrente, não é difícil concluir que, para fluidos incompressíveis, a velocidade aumenta quando as linhas de corrente se aproximam e diminui quando se afastam.

A porção de fluido marcada a sombreado na figura 5.8 ocupa uma região cuja parede lateral é definida por linhas de corrente. Este volume de fluido mantém-se sempre dentro do mesmo tubo de linhas de corrente, pois a velocidade do fluido é paralela às paredes do tubo: não há fluido a atravessá-la. Ao deslocar-se em direcção à região onde as linhas de corrente se apertam, o tubo estreita-se, o comprimento da porção sombreada de fluido tem que aumentar para o seu volume se mantenha. Para que isso seja possível, a secção anterior do fluido sombreado deve ter uma velocidade superior

■ Teorema de Bernoulli e conservação de energia ■



O teorema de Bernoulli é uma consequência da conservação de energia mecânica em fluidos sem viscosidade. Concentremo-nos na porção de fluido compreendida dentro de um tubo de linhas de corrente e limitado por duas superfícies, A e B . Um pouco mais tarde, em $t + \Delta t$, este mesmo fluido ocupa a região entre C e D . Como o fluido é incompressível o volume entre A e C e B e D é o mesmo, ΔV . O fluido que está atrás de A exerce uma pressão P_A e realiza um trabalho sobre o fluido sombreado $W_A = P_A \times S_A \times d_A = P_A \times \Delta V$. Mas o fluido sombreado, por sua vez, realiza trabalho sobre o fluido que está à frente de B , que podemos calcular do mesmo modo. Assim a variação de energia do fluido sombreado é

$$W_A - W_B = (P_A - P_B) \times \Delta V.$$

Este trabalho aparece como uma variação de energia cinética, que resulta do facto de o fluido entre B e D ter uma velocidade v_B diferente da do fluido entre A e C , v_A :

$$(P_A - P_B) \times \Delta V = \frac{1}{2} m_B v_B^2 - \frac{1}{2} m_A v_A^2.$$

Como $m_A = m_B = \rho \Delta V$, em que ρ é a massa volúmica,

$$P_A + \frac{\rho v_A^2}{2} = P_B + \frac{\rho v_B^2}{2}.$$

Isto é o mesmo que dizer que $P + \rho v^2/2 = \text{constante}$. Se houver uma variação de altura entre A e B , temos que incluir o termo de energia potencial gravítica e obtém-se

$$P + \rho v^2/2 + \rho gh = \text{constante}.$$

Caixa 5.1: O teorema de Bernoulli.

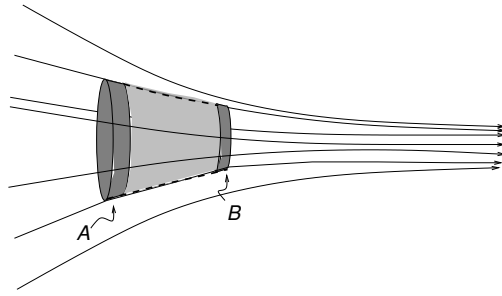


Figura 5.10: O fluido em B tem uma velocidade maior do que em A . Uma partícula de fluido acelera ao passar de A para B . A pressão é maior onde as linhas de corrente estão mais afastadas.

à da seção posterior: a velocidade do fluido aumenta quando as linhas de corrente se apertam (fig. 5.10).

Isto significa que uma partícula de fluido aumenta de velocidade à medida que se desloca neste escoamento. Segundo Newton, aceleração significa força: que força acelera o fluido?

No capítulo anterior já tínhamos concluído que se a pressão variar num fluido, as forças de pressão sobre uma partícula de fluido têm resultante não nula, no sentido em que a pressão diminui. Neste caso, a resultante das forças de pressão sobre o fluido a sombreado tem que ser dirigida para a região de estreitamento das linhas de força. Ou seja, a pressão tem que ser maior na região onde as linhas de força estão mais espaçadas e menor onde elas se estreitam.

Em conclusão:

onde a velocidade de um escoamento é maior a pressão é menor e vice-versa.

Este resultado, que é uma consequência da aplicação das leis de Newton aos fluidos, foi descoberto por Daniel Bernoulli, um físico e matemático do século XVIII. Além das forças de pressão, Bernoulli considerou também o peso do líquido e mostrou que a aplicação do princípio de conservação de energia mecânica ao movimento do fluido (ver Caixa 5.1 da página 122) permitia concluir a seguinte relação entre pressão, P , velocidade, v , e altura, h , de qualquer ponto do fluido (ρ é a massa volúmica):

$$P + \frac{\rho v^2}{2} + \rho gh = \text{constante} \quad (5.1)$$

Para altura constante obtemos $P + \rho v^2/2 = \text{constante}$, o que

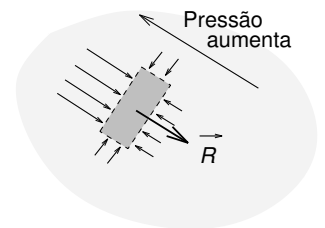


Figura 5.9: Se a pressão aumentar no sentido da seta, a resultante das forças de pressão no elemento sombreado, \vec{R} , não é nula e tem sentido oposto ao do aumento de pressão.

▷ **Teorema de Bernoulli**

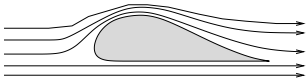


Figura 5.11: A velocidade do ar é maior por cima da asa, onde as linhas de corrente se aproximam, que por baixo. Logo a pressão é maior em baixo e a resultante das forças de pressão empurra a asa para cima.

▷ Actividade 5.2

implica naturalmente que se v aumenta, P diminui e vice-versa: é o caso que temos vindo a discutir. Para fluidos em repouso, por outro lado, este resultado não é mais que o princípio fundamental da hidrostática,

$$P + \rho gh = \text{constante} :$$

a pressão aumenta se a altura diminui (profundidade aumenta).

A relação entre pressão e velocidade expressa pelo teorema de Bernoulli, apesar de um pouco inesperada, explica muitos resultados de escoamentos de fluidos.

Um dos mais importantes é o da sustentação dos aviões. O perfil longitudinal de uma asa tem uma forma que favorece um escoamento do ar mais rápido por cima da asa que por baixo. O resultado é uma pressão maior por baixo da asa e uma resultante das forças de pressão dirigida para cima.

Na recente tragédia de Nova Orleães, o telhado do estádio *Superdome* foi arrancado porque a pressão no interior (ar em repouso) era maior que no exterior, onde sopravam ventos com velocidades da ordem dos 200 km h^{-1} .

*ETV*₄: Assumindo a validade do teorema de Bernoulli, calcular a diferença de pressão entre o interior e o exterior do *Superdome*. Calcular a força que uma tal diferença de pressão origina sobre uma área de um hectare ($10\,000 \text{ m}^2$, aproximadamente a área de um campo de futebol).

5.3 Viscosidade

5.3.1 Dissipação em líquidos

Após retirar a colher, depois mexer uma chávena de chá ou café, o líquido demora apenas alguns segundos a parar: é óbvio que não há conservação de energia mecânica no movimento de fluidos reais, pois se houvesse, um líquido, depois de agitado, não pararia.

Em líquidos reais existem forças semelhantes às forças de atrito que dissipam a energia, isto é, transferem energia do movimento macroscópico, para movimentos desordenados das moléculas ou átomos, que se manifestam por um aumento de temperatura.

No décimo ano verificámos isso mesmo: agitando água com uma varinha mágica observámos um aumento de temperatura (rever a Actividade A9). O trabalho realizado pelas pás da varinha, a partir de certa altura, não aumenta a energia de movimento macroscópico da água: as forças de viscosidade da água transferem a energia fornecida pela varinha para energia interna, e a temperatura da água sobe.

Contudo, existem situações em que, para tempos não muito longos, podemos ignorar essa dissipação e considerar que a energia se conserva. Só nesses casos o teorema de Bernoulli é uma boa aproximação ao comportamento de fluidos reais.

Intuitivamente associamos uma maior viscosidade a uma maior dificuldade de escoamento. Por exemplo, ao vertermos um líquido entre dois recipientes o líquido mais viscoso fá-lo-á mais lentamente. Ao analisar estas situações verifica-se que as forças de viscosidade, têm algumas características comuns com as forças de atrito (ver figura 5.12):

- são forças paralelas às superfícies sobre as quais se exercem;
- duas camadas de fluido em movimento a velocidades diferentes exercem forças de viscosidade uma sobre a outra, as quais se opõem ao deslocamento relativo entre as camadas.

Por exemplo, no escoamento da figura 5.12, a velocidade do fluido na direcção x aumenta com a coordenada z : o fluido acima do plano sombreado (região B) move-se com maior velocidade que o fluido da região A . O fluido A exerce, então, sobre o fluido B forças de viscosidade, que tendem a retardá-lo; as forças de B sobre A têm sentido oposto (princípio de acção e reacção) e tendem a acelerar A .

Para o mesmo escoamento, em líquidos diferentes, estas forças são tanto mais intensas quanto mais viscoso for o líquido.

5.3.2 Forças de resistência ao movimento num fluido

Regime de Stokes

Quando um sólido se move num fluido, este tem que se movimentar, porque o espaço ocupado pelo sólido vai variando. Se o

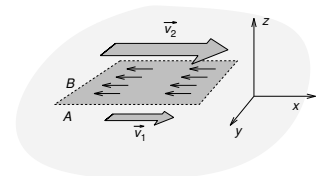


Figura 5.12: A camada A exerce forças de viscosidade sobre a camada B , através do plano que as separa, que tendem a anular a diferença de velocidade entre as duas camadas de fluido.

movimento de fluido é dissipativo, a energia mecânica não se conserva, diminui: se não fornecermos energia exteriormente, o sólido acaba por parar.

Isto significa que um fluido viscoso oferece resistência ao movimento de sólidos no seu interior: exerce forças com sentido oposto ao da velocidade do sólido, de modo a diminuir o módulo da sua velocidade.

Para velocidades muito baixas, verifica-se que essa força é proporcional à velocidade do corpo,

$$\vec{F} = -\gamma_S \vec{v}. \quad (5.2)$$

Esta lei chama-se lei de Stokes.

Como o sentido da força é oposto ao da velocidade, é também oposto ao do deslocamento num pequeno intervalo de tempo e o trabalho realizado sobre o corpo é negativo:

$$w = \vec{F} \cdot \vec{\Delta r} \approx \vec{F} \cdot \vec{v} \Delta t = -\gamma_S v^2 \Delta t.$$

A energia mecânica do corpo diminui:

$$\Delta E = -\gamma_S v^2 \Delta t,$$

ou, dividindo por Δt e tomando o limite $\Delta t \rightarrow 0$,

$$\frac{dE}{dt} = -\gamma_S v^2.$$

A energia dissipada por unidade de tempo (potência) é tanto maior quanto maior for a velocidade do sólido.

Para uma esfera, é conhecida a expressão do coeficiente γ_S :

$$\gamma_S = 6\pi R\eta$$

em que R é o raio da esfera e η a viscosidade dinâmica do fluido. Podemos tomar esta expressão como a definição de η : quanto mais viscoso o líquido, maior a força de Stokes e maior será η . Na tabela 5.1 indicamos as viscosidades de alguns líquidos.

\mathcal{ETV}_5 : Quais são as unidades SI de η ?

Líquido	$\eta/10^{-3} \text{ Pa s } (T = 293 \text{ K})$
Água	1.00
Azeite	84
Glicerina	1495
Óleo de Motor SAE 10	50 ~ 100
Ar (300 K)	0,018

Tabela 5.1: Tabela de viscosidades de alguns líquidos.

Regime de Newton

A lei de Stokes só é válida para velocidades relativas do sólido e líquido muito baixas³. O fenómeno do escoamento de um fluido viscoso à volta de um sólido é extremamente complexo e não é conhecida nenhuma lei da força de resistência do fluido aplicável para qualquer valor de velocidade relativa.

Contudo, para gamas de velocidades mais altas que as da lei de Stokes, a seguinte expressão dá uma descrição razoável da força (regime de Newton):

$$\vec{F} = -\gamma_N v^2 \vec{e}_{\parallel} \quad (5.3)$$

em que \vec{e}_{\parallel} é o versor na direcção da velocidade. O coeficiente γ_N tem a seguinte expressão,

$$\gamma_N = \frac{1}{2} C_D \rho A,$$

em que:

- ρ é a massa volúmica do fluido;
- A é a área da secção do sólido perpendicular à direcção de movimento (para uma esfera, $A = \pi R^2$);
- C_D é um número que depende da forma do sólido. Para uma esfera vale 0,5 e varia tipicamente entre 0,02 (uma asa), até 2 (uma placa plana colocada perpendicularmente à direcção de propagação).

³Mesmo para velocidades baixas, a expressão de γ_S é modificada se houver outros sólidos próximos da esfera em consideração. Por exemplo, a proximidades das paredes de um recipiente onde se move a esfera aumenta a força de resistência de Stokes.

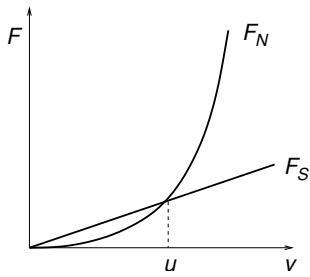


Figura 5.13: A expressão da força de resistência de Newton dá um valor superior à de Stokes para velocidades altas e menor para velocidades baixas.

Mas, afinal, o que é neste contexto uma velocidade baixa? Para que valores de velocidade são válidas estas duas expressões da força de resistência do fluido ao movimento de um sólido?

Se representarmos as expressões $\gamma_S v$ e $\gamma_N v^2$ em função de v (uma recta e uma parábola, respectivamente, fig. 5.13, verificamos que os seus valores são idênticos para uma velocidade u definida pela condição:

$$\gamma_S u = \gamma_N u^2 \Rightarrow u = \frac{\gamma_S}{\gamma_N}.$$

Para $v < u$, a expressão de Stokes dá um valor superior à de Newton, $\gamma_S v > \gamma_N v^2$; se $v > u$, verifica-se o contrário $\gamma_S v < \gamma_N v^2$. A lei de Stokes é aplicável para $v \ll u$; a lei de Newton vale no regime oposto, $v \gg u$.

Usando as expressões de γ_S e γ_N para o caso de uma esfera ($A = \pi R^2$, $C_D \approx 0,5$), obtemos:

$$u \approx \frac{6\pi R\eta}{C_D \rho A/2} \approx 24 \frac{\eta}{\rho R}.$$

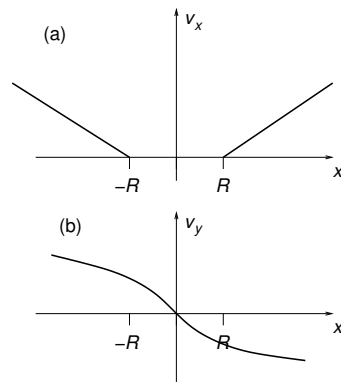
5.3.3 Forças de resistência e lei da inércia

As forças de resistência de fluidos ao movimento de sólidos têm uma consequência curiosa. Se for aplicada uma força externa a um corpo em repouso no seio de um fluido, o corpo acelera de acordo com a segunda lei de Newton: a sua velocidade aumenta. Mas a força de resistência do fluido aumenta também, pois depende da velocidade, até que acaba por atingir o valor a força externa: a partir dessa altura o corpo passa a ter movimento uniforme (\vec{v} constante). Se retirarmos a força externa a força de resistência do fluido faz diminuir a velocidade até zero. Ou seja, **se ignorarmos a força de resistência do fluido**, concluímos que para ter movimento uniforme temos que ter uma força externa e que sem força externa a velocidade decai para zero. Era isto, precisamente, que acreditava Aristóteles! Pudera, vivemos dentro de um fluido, o ar!

Foram precisos os génios de Galileu e de Newton para perceber que, para descobrir a verdade, era necessário imaginarmos os corpos subtraídos à influência da atmosfera, de qualquer outro meio e de qualquer outro corpo!

5.4 Respostas aos \mathcal{ETV} s

5.1. \mathcal{ETV}_1 : $v_y = 0$ no eixo Ox .



5.2. \mathcal{ETV}_2 : Duas linhas que se cruzam têm tangentes com direcções diferentes, no ponto de cruzamento. Ora a velocidade de um fluido num dado ponto só pode ser uma, não pode tomar dois valores distintos. Se as linhas de corrente disserem respeito a instantes diferentes, as suas tangentes no ponto de cruzamento dão as direcções das velocidades do fluido **em instantes diferentes**. Logo, podem perfeitamente cruzar-se.

5.3. \mathcal{ETV}_3 : O caudal é

$$Q = \frac{10 \times 10^{-3}}{45} = 2,22 \times 10^{-4} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}.$$

Como $Q = vA$, temos

$$v = \frac{Q}{A} = \frac{2,22 \times 10^{-4}}{3,14 \times 10^{-4}} = 0,71 \text{ m s}^{-1}.$$

5.4. \mathcal{ETV}_4 : Sendo a velocidade interior $v_i = 0 \text{ m s}^{-1}$ e a exterior $v_e = 200/3,6 = 56 \text{ m s}^{-1}$, a diferença de pressões é

$$P_i - P_e = \frac{1}{2} \rho v_e^2.$$

A massa volúmica do ar é $\rho = 1,3 \text{ kg m}^{-3}$ o que dá,

$$P_i - P_e = 2,01 \times 10^3 \text{ Pa}.$$

Numa área de 10^4 m^2 a força total seria,

$$F = (P_i - P_e) \times 10^4 = 2,01 \times 10^7 \text{ N},$$

ou seja, mais de 20 milhões de Newton, o que corresponde ao peso de quase 2000 toneladas.

5.5. \mathcal{ETV}_5 : γ_S tem unidades $\text{N}/(\text{m s}^{-1}) = \text{Nm}^{-1} \text{ s}$. Logo a viscosidade $\eta = \gamma_S/(6\pi R)$ tem unidades $\text{Nm}^{-2} \text{ s} = \text{Pa s}$.

5.5 Actividades questões e problemas

5.5.1 Actividades

5.1. Visualização e comentário de duas animações de movimentos de fluidos.

Ver ficha de Actividade A39.

5.2. Ilustrações experimentais do teorema de Bernoulli

Ver ficha de Actividade A40.

5.3. Medição da viscosidade de um líquido.

Ver ficha de Actividade A41.

5.5.2 Questões

5.1. A figura 5.14 pode representar uma linha de corrente de um escoamento? E a trajetória de uma partícula de fluido?

5.2. A figura 5.15 mostra o campo de velocidade de um escoamento num canal. Mesmo na margem a velocidade é zero. Suponhamos que colocamos na água um linha de bóias dispostas perpendicularmente à margem.

(a) Como se altera a posição das bóias com o tempo? Continuam a definir uma linha recta perpendicular à margem?

5.3. Se observarmos o escoamento de água de uma torneira, notamos que o fio de água é mais estreito em baixo do que à saída da torneira.

(a) Porquê?

(b) E se a água for expelida para cima, por exemplo com uma mangueira, o diâmetro do jacto aumenta ou diminui com a altura? Porquê?

5.4. A área do bico da seringa da figura 5.16 é dez vezes inferior à área da secção mais larga de seringa.

(a) Se deslocarmos o êmbolo a uma velocidade de 1 cm s^{-1} , com que velocidade sai o fluido no bico?

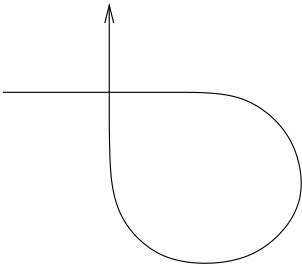


Figura 5.14: Uma linha de corrente?

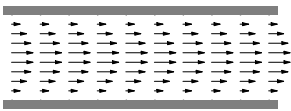


Figura 5.15: Um escoamento num canal.



Figura 5.16: Qual é a velocidade de saída do líquido?

5.5. A pressão na superfície de um líquido exposto ao ar é a pressão atmosférica. Isso significa que a pressão de água no furo do balde da figura 5.17 é a mesma que à superfície do líquido.

- Será que isto contradiz o princípio fundamental da hidrostática?
- Qual é a velocidade do líquido à saída do orifício? (Se a área do balde foi muito superior à área do orifício, a velocidade à superfície pode ser considerada próxima de zero).

5.6. Quando um para-quedista abre o para-quedas, a sua velocidade de queda diminui. Supondo que a força de resistência do ar é dada pela expressão de Newton, que factor foi alterado para diminuir a velocidade?

5.5.3 Problemas

5.1. O orifício do balde da figura 5.17 tem um diâmetro de 5 mm e está a uma profundidade $h = 40$ cm.

- Qual é o caudal de água que sai do orifício?
- Se o diâmetro do balde for de 45 cm, quanto tempo passaria até esvaziar o balde até à altura do orifício, se este caudal se mantivesse?
- O balde demora mais, menos, ou o mesmo tempo a esvaziar até ao orifício do que o foi calculado na alínea anterior?

5.2. O diâmetro do bico da seringa da figura 5.16 é 1,5 mm e a sua área dez vezes inferior à da secção mais larga da seringa.

- Se pudermos aplicar o teorema de Bernoulli, que força é necessário aplicar ao êmbolo para o deslocar a uma velocidade de 1 cm s^{-1} ?

5.3. O compressor representado na figura 5.18 mantém à superfície do líquido (água) uma pressão, P , superior à pressão atmosférica, P_0 . A altura $h = 2$ m e supomos que são nulos os efeitos de viscosidade da água.

- Que valor de $P - P_0$ é necessário para que a água chegue ao topo do tubo?

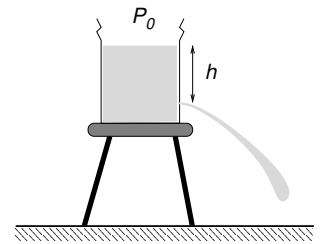


Figura 5.17: Qual é a velocidade de saída de água no orifício?

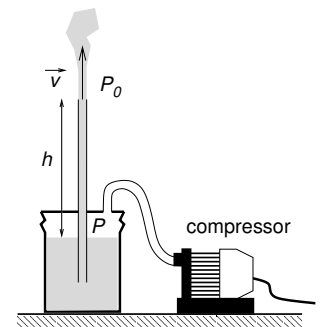


Figura 5.18: Que pressão é necessária para ter um repuxo?

- (b) Para $P - P_0 = P_0$ a que velocidade sai a água na base do repuxo?

5.4. A lei de Stokes para o movimento de uma esfera num fluido,

$$\vec{F} = -6\pi R\eta\vec{v}$$

só é válida se a velocidade for suficientemente baixa para que

$$v \ll \frac{\eta}{\rho R}. \quad (5.4)$$

- (a) Calcular a velocidade terminal de uma gota de chuva de diâmetro 1 mm, assumindo a lei de Stokes.
- (b) Verificar se a condição de validade da lei de Stokes é satisfeita.
- (c) Calcular a velocidade terminal da gota no regime de Newton (força proporcional a v^2)
- 5.5. Uma esfera de aço com $R = 1 \text{ mm}$ cai com velocidade uniforme, $v = 10 \text{ cm s}^{-1}$, num óleo de massa volúmica $\rho = 0,9 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$.
- (a) Calcular a potência dissipada pelas forças de viscosidade do líquido.
- 5.6. Uma para-quedista não pode atingir o solo com uma velocidade superior a 5 m s^{-1} . Assumindo a validade do regime de Newton para a força de resistência do ar, calcular a área que o pára-quedas deve ter para uma para-quedista com $m = 70 \text{ kg}$. Assumir $C_D = 2$.
- 5.7. Um estudante, ao realizar a actividade 5.3, obteve os seguintes valores para os tempos de queda de uma esfera de aço, com $R = 1 \text{ mm}$, em função da distância:

h/cm	t/s
5	4,4
10	8,7
20	17,5
30	26,1
40	34,7

- (a) Para calcular a velocidade terminal, o estudante fez um gráfico e calculou um declive: que gráfico fez e qual foi o valor da velocidade terminal que obteve?
- (b) Ao calcular a viscosidade da glicerina esqueceu-se de levar em conta a impulsão. Que valor obteve para η ?
- (c) Que valor se obtém para η , correctamente, a partir destes dados?
- (d) O movimento está dentro das condições de validade do regime de Stokes?

$$(\rho_{\text{aço}} = 7,9 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}; \rho_{\text{glic}} = 1,3 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3})$$

Capítulo 6

Oscilações

Recentemente o Paquistão foi assolado por um terramoto devastador. Durante um terramoto a superfície da Terra vibra. Essas vibrações comunicam-se aos edifícios e, se a amplitude da vibração exceder as margens de segurança, os edifícios colapsam.

Quando falamos fazemos vibrar as nossas cordas vocais. Essa vibração transmite-se ao ar e constitui o som. Todos os instrumentos musicais, têm componentes (cordas, colunas de ar, palhetas metálicas, ferros) que vibram, oscilam, para produzir o som. Dentro de um relógio, computador, ou telemóvel, existe um pequeno cristal de quartzo cujas oscilações constituem o elemento central de controlo do tempo e do sincronismo destes aparelhos. A radiação electromagnética põe cargas a oscilar em torno de posições de equilíbrio e por isso dizemos que é constituída por vibrações dos campos eléctricos e magnéticos.

O estudo de sistemas oscilatórios (osciladores) é um dos tópicos mais importantes quer da Física Clássica quer da Física Quântica.

Um corpo, ou um sistema qualquer, que se encontra numa situação de equilíbrio estável, tenderá a regressar a essa posição, se dela for afastado ligeiramente e, depois, largado. É por isso que dizemos que o equilíbrio é **estável**.

Uma esfera que rola numa taça numa taça esférica é um bom exemplo (fig. 6.1). Se deslocarmos a esfera do centro da taça em qualquer direcção e a largarmos, o seu peso e a reacção normal da taça aceleram-na em direcção à posição de equilíbrio. Ao passar no ponto de equilíbrio, a velocidade da esfera não é nula e ela não para imediatamente, começa a subir de novo a taça. A partir desse instante, as forças sobre a esfera retardam o seu movimento

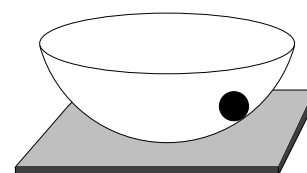


Figura 6.1: A posição de equilíbrio estável é o centro da taça.

e fazem-na regressar de novo ao centro da taça: a esfera oscila em torno da posição de equilíbrio.

▷ **conspícuo:** que dá nas vistas.

Algo semelhante acontece com qualquer sistema que seja perturbado ligeiramente da sua configuração de equilíbrio. Por esta razão, os fenómenos oscilatórios são tão **conspícuos**. Naturalmente, efeitos de atrito e de dissipação de energia tenderão a reduzir, mais ou menos rapidamente, a energia de um oscilador. As oscilações são **amortecidas**, o afastamento máximo da posição de equilíbrio em cada oscilação, a **amplitude**, vai diminuindo com o tempo e o sistema acaba por parar na posição de equilíbrio.

Se são tão comuns os fenómenos de oscilação, poderíamos perguntar:

Teremos que estudar separadamente todos os tipos de osciladores, ou existem características comuns a todos os fenómenos de oscilação?

Efectivamente, o comportamento dinâmico de vastas classes de osciladores é, no essencial, o mesmo: ao estudar um, estudam-se todos. Por isso, alguns dos conceitos que vamos introduzir neste capítulo podem aplicar-se a sistemas muito diferentes daqueles que vamos utilizar como exemplo. Uma das características mais importantes é que muito osciladores têm um movimento **periódico**: o seu movimento repete a mesma configuração ao fim de um intervalo de tempo fixo, o **período**. Para um tipo muito importante de osciladores, osciladores harmónicos, este período é uma característica do oscilador que não depende do modo como foi posto em oscilação, em particular, não depende da energia da oscilação. A nossa capacidade de medição precisa do tempo é totalmente baseada neste facto.

6.1 Exemplos de osciladores

6.1.1 O Pêndulo

Um pêndulo é uma massa suspensa por um fio de comprimento fixo num campo gravítico. A posição de equilíbrio estável é, naturalmente, a configuração em que o fio está vertical e a massa directamente por baixo do ponto de suspensão. Fora desta posição a reacção normal do fio e o peso do corpo deixam de ser colineares. A resultante acelera o corpo em direcção à posição de equilíbrio. A

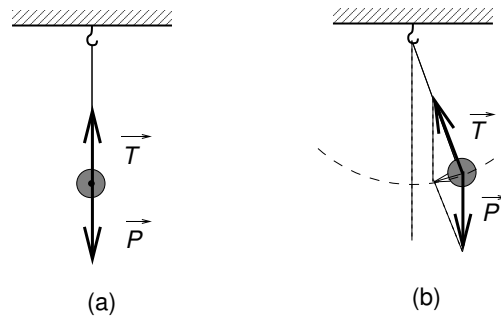


Figura 6.2: Na posição de equilíbrio a resultante das forças sobre o corpo é nula (a). Fora desta posição a tensão do fio e o peso do corpo deixam de ser colineares; a resultante acelera o corpo em direcção à posição de equilíbrio (b).

aceleração tangencial é positiva e a velocidade aumenta. Quando o corpo passar na posição de equilíbrio terá alguma energia cinética e continuará o seu movimento, agora com aceleração tangencial negativa e velocidade a diminuir. Acaba por parar e inverter o sentido de movimento, repetindo-o agora no sentido inverso.

Se houvesse conservação de energia mecânica, o pêndulo voltaria à posição inicial e o movimento repetir-se-ia indefinidamente. Na prática é possível reduzir a dissipação de tal modo, que são necessárias muitas oscilações para que o pêndulo perca uma parte significativa da sua energia.

O **período** do pêndulo é o intervalo de tempo entre duas configurações sucessivas com a mesma posição e velocidade. O ângulo máximo de afastamento da vertical é a **amplitude angular** da oscilação.

▷ Actividade 6.1

É atribuída a Galileu a descoberta que o período de oscilação do pêndulo não depende da amplitude de oscilação, se esta não for demasiado grande. Esta descoberta foi crucial para o desenvolvimento da nossa capacidade de medição do tempo e, durante muito tempo, a base da tecnologia dos relógios. A oscilação de um pêndulo marca um intervalo de tempo constante: contar oscilações de um pêndulo é medir o tempo!

6.1.2 Flutuador

Um corpo que flutua à superfície da água, tem um volume imerso, V_i , tal, que o seu peso, $P = mg$, e a impulsão, $I = \rho_a V_i g$, são

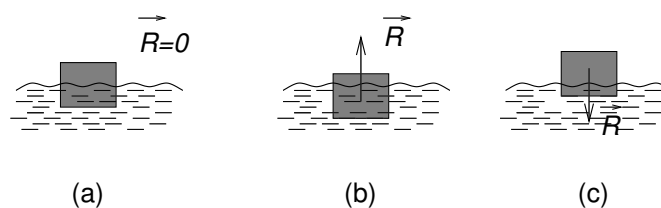


Figura 6.3: Na situação de equilíbrio a resultante do peso e da impulsão, \vec{R} , é nula, (a). O sentido da resultante é oposto ao deslocamento da posição de equilíbrio, portanto o corpo oscila se o equilíbrio for perturbado, (b) e (c).

iguais. No equilíbrio, $V_i = V_{\text{eq}}$,

$$V_{\text{eq}} = \frac{m}{\rho_a},$$

em que m é a massa do corpo e ρ_a a massa volúmica da água.

Se o corpo estiver afundado relativamente à configuração de equilíbrio ($V_i > V_{\text{eq}}$), a impulsão é maior que o peso e o corpo fica sujeito a uma força de sentido ascendente; por outro lado, se o corpo estiver acima da posição de equilíbrio ($V_i < V_{\text{eq}}$), a impulsão será menor que o peso e a resultante terá o sentido descendente. A resultante das forças que actuam no corpo tem sentido oposto ao do deslocamento do equilíbrio e o sistema oscilará se for perturbado da posição de equilíbrio.

6.1.3 Massa suspensa em mola

Se suspendermos uma esfera numa mola esta distende-se e, na configuração de equilíbrio, o módulo da força exercida pela mola

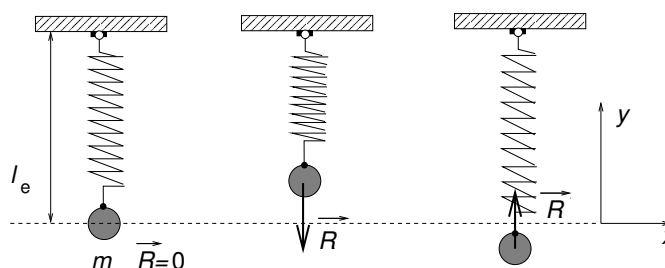


Figura 6.4: A resultante das forças sobre a esfera tem o sentido oposto do deslocamento da posição de equilíbrio.

será igual ao peso da esfera (supomos o peso da mola desprezável em comparação com o da esfera).

Se a esfera estiver abaixo da posição de equilíbrio, a força exercida pela mola será ascendente e maior que o peso e a resultante terá o sentido ascendente. Se a esfera estiver acima da posição de equilíbrio a mola fica menos distendida e a respectiva força diminui; a resultante tem, então, o sentido do peso da esfera.

6.1.4 Absorção de choques

Por vezes é muito importante garantir um amortecimento rápido de vibrações: é o caso dos sistemas destinados absorver choques externos em estruturas.

O exemplo mais comum é o dos amortecedores dos automóveis. A maior parte da massa de um carro, incluindo a cabina onde viajam os passageiros, está apoiada em molas, que por sua vez estão sustentadas na estrutura que contém as rodas e eixos e que contacta directamente com a estrada. Uma imperfeição na estrada origina um brusco movimento vertical das rodas, comprimindo ou distendendo as referidas molas. Estas molas permitem que a aceleração na cabine não seja tão grande como seria se as rodas estivessem ligadas rigidamente ao resto do carro. As duas partes do carro ligadas pelo sistema de molas constituem um oscilador que é importante amortecer rapidamente, pois a sua oscilação é não apenas desconfortável, mas perigosa, já que pode fazer perder o contacto das rodas com a estrada. Esse é o papel dos amortecedores. Na configuração mais comum, são dois tubos: o mais exterior está ligado a um pistão perfurado, que se move no tubo interior, o qual, por sua vez, está cheio de óleo. Um dos tubos está preso à estrutura do carro e o outro ao eixo junto à roda. A energia de oscilação é rapidamente dissipada no movimento do óleo viscoso no amortecedor.

Sistemas como estes existem em muitas outras situações, sempre que seja necessário absorver e dissipar a energia de choques em estruturas.

6.1.5 Resumo

Um sistema oscila quando fica sujeito a uma **força restauradora** ao ser deslocado da posição de equilíbrio. Esta força é nula na configuração de equilíbrio; tem sentido oposto ao do deslocamento da posição de equilíbrio.

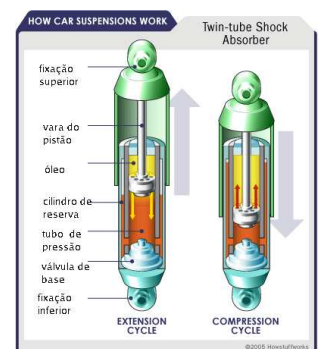


Figura 6.5: Amortecedores de um carro. Adaptado de [3].

A oscilação ocorre devido à **inércia**. A força restauradora acelera o sistema em direcção à posição de equilíbrio, mas este não para quando a força se anula ao passar no equilíbrio; as forças determinam acelerações, não determinam velocidades.

Para afastar um sistema da posição de equilíbrio é necessário realizar trabalho externo sobre ele. Como a força restauradora é oposta ao deslocamento, a força externa tem que ter o sentido do deslocamento e realiza trabalho, aumentando a energia do sistema relativamente à da configuração de equilíbrio. Se a energia mecânica do oscilador se conservar, a **amplitude** da oscilação (afastamento máximo da posição de equilíbrio em cada oscilação) mantém-se constante.

A dissipação faz com a energia do oscilador diminua em cada oscilação e, com o passar do tempo, o sistema vibra cada vez mais próximo da posição de equilíbrio. Estas oscilações chamam-se **amortecidas**.

Em osciladores em que a energia se mantém constante, o movimento é **periódico**: o oscilador repete o mesmo estado ao fim de um intervalo de tempo fixo, o **período**. A existência de fenómenos físicos periódicos é a base da tecnologia de medição e controlo do tempo.

6.2 Movimento Harmónico Simples

6.2.1 Equação de movimento

Vamos agora estudar com mais detalhe um exemplo concreto de oscilador. O nosso sistema será constituído por uma esfera suspensa numa mola, em movimento vertical (direcção Oy). Para determinar o movimento da esfera teremos apenas que aplicar o programa newtoniano.

As forças Para movimentos relativamente lentos as forças de resistência do ar são pouco importantes. As forças na esfera são, então, o seu peso e a força elástica da mola:

$$\begin{aligned}\vec{P} &= -mg\hat{j} \\ \vec{F}_e &= k(l - l_0)\hat{j},\end{aligned}\tag{6.1}$$

em que l_0 é o comprimento da mola quando não está distendida ou comprimida. A massa m e a constante da mola, k , são grandezas que supomos conhecidas.

\mathcal{ETV}_1 : Que sentido tem a força elástica se a mola estiver comprimida? E se estiver distendida? A equação 6.1 tem o sinal correcto, ou precisa de um sinal negativo? Se invertermos o sentido do eixo Oy , como se modificam as equações das forças?

Parece natural, já que vamos estudar oscilações em torno da posição de equilíbrio, fazer coincidir a origem do sistema de eixos com essa posição. Assim,

$$l = l_e - y(t), \quad (6.2)$$

em que $y(t)$ é o deslocamento segundo Oy em relação à posição de equilíbrio, também designado, neste contexto, por **elongamento**. A resultante das forças sobre a esfera é:

$$\begin{aligned} \vec{R} &= (-mg + k(l_e - l_0 - y))\hat{\mathbf{j}} \\ &= (-mg + k(l_e - l_0) - ky)\hat{\mathbf{j}} \\ &= -ky\hat{\mathbf{j}}. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Por que razão pudemos simplificar deste modo a expressão da resultante? Sorte?

Não! O comprimento de equilíbrio, l_e , é **definido** pelo anulamento da resultante das forças sobre a esfera:

$$-mg + k(l_e - l_0) = 0. \quad (6.4)$$

Ao escolher a posição de equilíbrio como origem de coordenadas, temos que obter resultante nula quando $y = 0$.

Este resultado traduz a observação que fizemos antes sobre vários osciladores: a força restauradora tem o sentido oposto ao do alongamento: se $y > 0$, $R_y < 0$ e vice-versa.

Além disso, neste caso, o módulo da força restauradora é proporcional ao alongamento $y(t)$ (eq. 6.3). Este tipo de oscilador, em que

$$\text{força} \propto -\text{alongamento}$$

chama-se **oscilador harmónico, ou linear**. k é a **constante da força restauradora** e tem unidades de Nm^{-1} (força por unidade de deslocamento).

Para pequenos desvios do equilíbrio, é quase sempre possível aproximar a força restauradora por uma expressão semelhante à da eq. 6.3, pelo que quase todos os osciladores são harmónicos, quando oscilam com pequena amplitude.

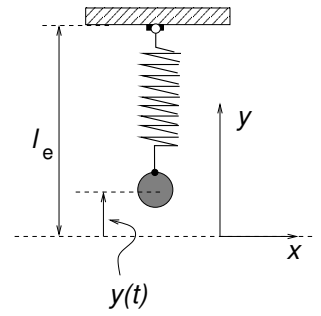


Figura 6.6: O comprimento da mola é $l_e - y(t)$.

▷ Oscilador harmónico

A segunda lei Como o movimento é segundo Oy ,

$$\vec{a}(t) = a_y(t)\hat{\mathbf{j}}.$$

A segunda lei de Newton diz-nos que:

$$ma_y(t) = -ky(t),$$

ou

$$a_y(t) = -\frac{k}{m} \times y(t). \quad (6.5)$$

A segunda parte do programa de Newton está completa: se soubermos a posição $y(t)$ da esfera, sabemos calcular a sua aceleração. Esta equação é a **equação de movimento do oscilador harmónico**.

Para completar o programa Newtoniano temos que descobrir que alongamentos $y(t)$ satisfazem esta equação: isto é, que funções $y(t)$ têm uma segunda derivada (aceleração $a_y(t)$) proporcional e de sinal oposto à própria função, $y(t)$.

\mathcal{ETV}_2 : Suponhamos que, no instante $t = 0$, $y = y_0 \neq 0$ e, portanto, $a_y = -(k/m)y_0$. Será o movimento uniformemente acelerado,

$$y(t) = y_0 - \frac{1}{2} \left(\frac{k}{m} y_0 \right) t^2$$

$$v_y(t) = - \left(\frac{k}{m} y_0 \right) t \quad ?$$

Por que não?

6.2.2 Energia de um oscilador

Qual é a energia deste oscilador, para movimentos verticais? Temos:

- Energia cinética: $E_c = mv_y^2/2$;
- Energia potencial gravítica: tomando a altura de referência como sendo a de equilíbrio, $E_g = mgy$;

Temos que juntar a estes dois termos a energia elástica da mola,

$$E_e = \frac{1}{2}k(l - l_0)^2,$$

em que l_0 é comprimento da mola se não estiver comprimida nem distendida; o comprimento da mola é $l = l_e - y$, em que l_e é o comprimento da mola quando a esfera está na posição de equilíbrio (ver fig. 6.6 na página 141). Assim,

$$\begin{aligned} E_e &= \frac{1}{2}k(l_e - y - l_0)^2 \\ &= \frac{1}{2}k(l_e - l_0)^2 + \frac{1}{2}ky^2 - k(l_e - l_0)y. \end{aligned}$$

A energia potencial total (elástica mais gravítica) é:

$$E_p = \frac{1}{2}k(l_e - l_0)^2 + \frac{1}{2}ky^2 + (mg - k(l_e - l_0))y.$$

Para $l = l_e$, o módulo do peso é igual ao da força elástica,

$$mg = k(l_e - l_0),$$

pelo que

$$E_p = \frac{1}{2}k(l_e - l_0)^2 + \frac{1}{2}ky^2.$$

O primeiro termo é uma constante que não depende da posição da esfera durante a oscilação:

$$E_p = E_0 + \frac{1}{2}ky^2. \quad (6.6)$$

Conforme vemos na figura 6.7, a energia potencial é mínima na posição de equilíbrio, o ponto onde a força restauradora é nula.

Sempre que a força restauradora seja proporcional ao alongamento, isto é, sempre que o oscilador seja harmónico, obtemos um resultado semelhante: a energia potencial varia como o quadrado do alongamento.

6.2.3 Energia do pêndulo

O caso do pêndulo é uma boa ilustração da última frase da secção anterior e do facto de muitos osciladores serem harmónicos para oscilações de pequena amplitude.

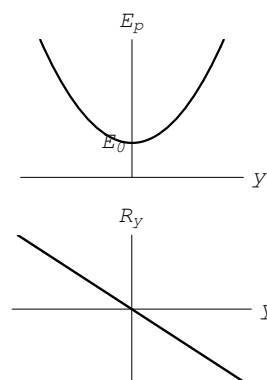


Figura 6.7: Energia potencial e força elástica de uma massa suspensa numa mola.

Escolhamos a origem dos eixos no ponto de equilíbrio do pêndulo. As coordenadas $x(t)$ e $y(t)$ não são independentes porque a trajetória é uma circunferência com centro no ponto de suporte e raio igual ao comprimento l do fio. Isto é,

$$x^2 + (l - y)^2 = l^2$$

ou

$$x^2 + l^2 - 2ly + y^2 = l^2.$$

Para pequenas oscilações, temos $y \ll l$ e $y^2 \ll 2ly$. Podemos desprezar o termo y^2 em comparação com $2ly$ e obter¹:

$$y \approx \frac{x^2}{2l}.$$

A energia potencial gravítica, medida relativamente à posição de equilíbrio, é

$$E_p = mgy = \frac{1}{2} \frac{mg}{l} x^2.$$

Obtemos uma expressão semelhante à do sistema massa–mola com uma constante de mola efectiva

$$k = \frac{mg}{l}.$$

Como

$$y = \frac{x^2}{2l} = x \times \left(\frac{x}{2l} \right),$$

e o termo entre parêntesis é muito menor que a unidade para pequenas oscilações ($x \ll l$), podemos concluir que $y \ll x$. Logo, a componente v_x da velocidade é muito superior a v_y e a energia cinética é

$$E_c = \frac{1}{2} m (v_x^2 + v_y^2) \approx \frac{1}{2} m v_x^2.$$

Em resumo:

Para pequenas oscilações, o pêndulo é equivalente a um oscilador em movimento segundo Ox , com massa m e constante de força $k = mg/l$.

¹Um resultado semelhante apareceu no capítulo 5, das notas do 11º ano, quando discutimos a aceleração da Terra relativamente ao Sol.

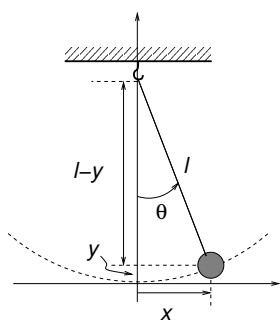


Figura 6.8: Como escrever a energia potencial do pêndulo?

\mathcal{ETV}_3 : É fácil obter uma expressão exacta para a energia potencial do pêndulo em função do ângulo com a direcção vertical. Como $l - y = l \cos \theta$, temos

$$E_p = mgy = mgl(1 - \cos \theta)$$

Por outro lado, $x = l \sin \theta$.

Calcular e comparar os valores obtidos com as duas expressões,

$$E_p = mgl(1 - \cos \theta) \quad (\text{exacta})$$

e

$$E_p = \frac{1}{2} \frac{mg}{l} x^2 \quad (\text{aproximada}),$$

para um pêndulo com $l = 1 \text{ m}$, $m = 1 \text{ kg}$ e ângulos de 5° , $10^\circ, 15^\circ, \dots$

6.2.4 A solução

Elongamento, velocidade e energia

▷ Actividade 6.2.

Voltemos ao sistema massa-mola em oscilação vertical: se deslocarmos a massa de $y = 10 \text{ cm}$ da posição de equilíbrio e a largarmos, o que acontece?

Antes de fazer a experiência proposta na actividade 6.2, podemos tentar antecipar o aspecto geral dos gráficos de $y(t)$ e $v_y(t)$. O exercício da Caixa 6.1 chama a atenção para alguns pontos a ter em atenção. Se os levarmos em conta, chegaremos a gráficos semelhantes aos da figura 6.9; na actividade 6.2 encontram-se gráficos semelhantes. Vejamos alguns pontos importantes.

i) Os extremos de $y(t)$ ocorrem nos instantes em que $v_y(t) = 0$.

Com efeito, os extremos correspondem aos instantes em que a esfera inverte o sentido de movimento e a velocidade se anula.

ii) A energia total do oscilador é o valor da energia potencial nos pontos extremos de alongamento.

■ \mathcal{ETV}_4 : adivinhando o movimento oscilatório harmónico ■

Desenhar um gráfico esquemático do que se espera obter para $y(t)$ em função de t e $v_y(t)$ em função de t , supondo a posição inicial $y(0) = 10$ cm, com $v_y(0) = 0$. Ter em atenção, em particular, os pontos notáveis, máximos, mínimos e zeros, destas duas funções. Depois de realizado o exercício, verificar se os gráficos levaram em conta os seguintes pontos:

1. A massa é largada do repouso. A sua velocidade inicial é zero. Qual é o declive da tangente ao gráfico de $y(t)$ para $t = 0$?
2. Como a aceleração inicial é negativa, a coordenada $y(t)$ deve começar por diminuir. O valor de $v_y(t)$ deve tornar-se positivo ou negativo? O que deve acontecer ao declive da tangente ao gráfico de $y(t)$, à medida que t aumenta?
3. Quando $y(t)$ passa a posição de equilíbrio, $y = 0$, a força troca de sentido: a força e a velocidade passam a ter sentidos opostos. O que deve acontecer ao módulo da velocidade? Como deve variar o declive da tangente ao gráfico de $y(t)$?
4. Quando $y(t)$ atinge o valor mínimo, quanto vale $v_y(t)$?
5. Como não consideramos forças de atrito, a energia mecânica da massa suspensa conserva-se. Quando $y(t)$ volta a passar por um máximo, o seu valor é maior, menor ou igual a $y(0)$?
6. Se a massa voltar a estar na posição inicial, com velocidade nula, ao fim de T segundos, o que vai acontecer nos próximos T segundos?

Depois de rever estes pontos, confrontar os gráficos feitos com os da figura 6.9 da página 147.

Caixa 6.1: Adivinhando o movimento de um oscilador simples.

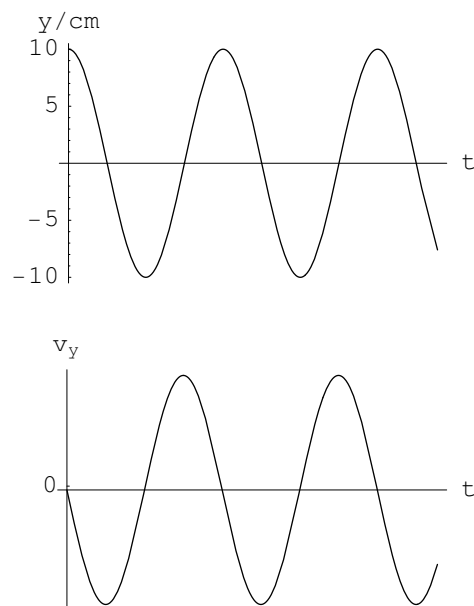


Figura 6.9: Gráficos de posição e velocidade de um oscilador em função do tempo.

Nos extremos de alongamento, $y(t) = \pm y_0$, a velocidade e a energia cinética são nulas; a energia total tem apenas o termo potencial:

$$E = E_p(y_0) = E_0 + \frac{1}{2}ky_0^2.$$

- iii) Se houver conservação de energia, o sistema oscila entre valores simétricos, y_0 e $-y_0$.

Isto resulta do ponto anterior. Nos extremos de alongamento a energia total é a energia potencial; como a primeira se conserva, a energia potencial tem que ser a mesma, sempre que $y(t)$ passe por um máximo ou mínimo; os valores máximo e mínimo de $y(t)$ têm que ser simétricos, $\pm y_0$, pois $E_p - E_0 \propto y^2$.

- iv) A velocidade tem módulo máximo na posição de equilíbrio.

Na posição de equilíbrio a energia potencial tem o valor mínimo: a energia cinética terá então o valor máximo. Logo, a velocidade será máxima para alongamento nulo. Durante a

oscilação a energia passa de potencial a cinética quando a esfera acelera em direcção à posição de equilíbrio e de cinética para potencial quando ela se afasta dessa posição.

- v) Havendo dissipação de energia, os valores dos máximos e mínimos de $y(t)$ vão diminuindo em módulo e as oscilações vão diminuindo de amplitude com o tempo.

Se a energia diminui, o valor de $y(t)^2$, ao passar um máximo ou mínimo, tem que ser menor em virtude do ponto **ii**).

\mathcal{ETV}_5 : Desenhar de um modo esquemático, no mesmo gráfico, as energias cinéticas e potencial do oscilador em função do tempo. É habitual representar apenas a parte variável da energia potencial, $E_p - E_0$. Será que os períodos de oscilação de E_c e E_p são o mesmos que os de $y(t)$ ou $v_y(t)$?

O período

Os valores máximo e mínimo do alongamento $y(t)$ e da velocidade $v_y(t)$ dependem da energia total da oscilação. Como esta se conserva, quanto maior for a energia do estado inicial, maior será a amplitude do movimento.

E o período? Será que varia também com a energia?

Um dos resultados mais importantes da equação de movimento do oscilador harmónico (com força restauradora proporcional ao alongamento) é o seguinte:

O período de um oscilador harmónico é independente da amplitude das oscilações e das condições iniciais do movimento. Depende apenas da massa, m , e da constante, k , da força restauradora.

Na Actividade 6.2 teremos oportunidade de verificar este resultado em relação ao sistema de massa suspensa numa mola. Já referimos que foi Galileu que descobriu esta propriedade das oscilações do pêndulo.

Podemos compreender este resultado do seguinte modo.

O intervalo de tempo que decorre entre um mínimo, $y(t) = -y_0$, e o zero seguinte, $y(t + \Delta t) = 0$, é um quarto de período, $\Delta t = T/4$. No instante inicial deste intervalo a esfera está a uma distância y_0 do ponto de equilíbrio e tem velocidade nula; no instante final a velocidade é máxima, v_{\max} . Qual será a velocidade média neste intervalo? À partida não sabemos, mas parece razoável admitir que deve ser proporcional a v_{\max} :

$$v_m \propto v_{\max}.$$

Quando o sistema passa na origem, toda a energia potencial, em excesso da do equilíbrio, se transformou em energia cinética:

$$\frac{1}{2}mv_{\max}^2 = \frac{1}{2}ky_0^2 \Rightarrow v_{\max} = \sqrt{\frac{k}{m}}y_0$$

então

$$v_m \propto \sqrt{\frac{k}{m}}y_0$$

Este resultado diz-nos que no intervalo de tempo em que o oscilador passa de um mínimo a um zero, $T/4$, tem uma velocidade média proporcional à distância que tem que percorrer, y_0 . Ora, por definição de velocidade média,

$$v_m \Delta t = v_m \frac{T}{4} = y_0,$$

ou seja,

$$\frac{T}{4} = \frac{y_0}{v_m} \propto \frac{y_0}{y_0 \sqrt{k/m}} \propto \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (6.7)$$

O período não depende da amplitude porque y_0 cancela entre o numerador e o denominador. Para uma amplitude maior o oscilador percorre uma distância maior entre um mínimo de alongamento e um zero, mas fá-lo com uma velocidade média superior também: demora o mesmo tempo.

Se a energia potencial, $E_p - E_0$, não fosse a de uma força elástica, proporcional ao **quadrado** do alongamento, não haveria cancelamento de y_0 entre o numerador e denominador da expressão da equação 6.7 e o período dependeria da amplitude.

Daqui a pouco veremos que a fórmula exacta do período de um oscilador harmónico é, de facto:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Este resultado é um dos mais importantes da física do oscilador harmónico: os valores da massa e da constante da força restauradora determinam o período. Cada oscilador tem um período característico, independente do modo como é posto a oscilar ou da energia que tem no seu movimento. Podemos aumentar ou diminuir a energia de um oscilador, que o seu período T , ou frequência de oscilação, $f = 1/T$, não variam. Toda a tecnologia que depende de manter o sincronismo entre vários processos (os relógios, a transmissão de rádio ou televisão, as telecomunicações, o processamento no CPU de um computador, etc.) é baseada nesta propriedade dos osciladores harmónicos.

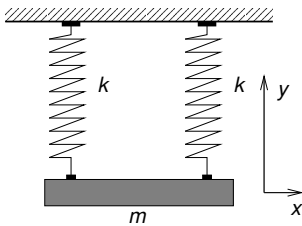


Figura 6.10: Qual é frequência deste oscilador?

$\mathcal{E}\mathcal{T}\mathcal{V}_6$: A barra da figura 6.10 tem massa $m = 2 \text{ kg}$ e está suspensa em duas molas idênticas com $k = 200 \text{ N m}^{-1}$. Qual é a frequência de oscilação vertical deste sistema?

6.3 Descrição matemática do MHS

Já sabemos muito sobre as características do movimento harmónico simples. Todavia, ainda não completamos o programa Newtoniano. Sabendo a posição e velocidade num dado instante, $y(t_0)$ e $v_y(t_0)$, que valores tomam o alongamento e a velocidade em qualquer instante t ?

6.3.1 As funções trigonométricas

Vamos começar por escrever os resultados, como se eles tivessem caído do céu. Mais à frente veremos que existe uma relação estreita entre o movimento harmónico simples e o movimento circular uniforme e estes resultados tornar-se-ão menos misteriosos.

A função $y(t)$ que satisfaz a equação de movimento, eq. 6.5, da página 142,

$$a_y(t) = -\frac{k}{m}y(t)$$

tem a forma:

$$y(t) = y_0 \cos(\omega t + \theta_0). \quad (6.8)$$

A velocidade, por sua vez, é

$$v_y(t) = -\omega y_0 \text{sen}(\omega t + \theta_0) \quad (6.9)$$

▷ Actividade 6.3

em que:

- ω , a frequência angular, vale

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

- y_0 é a amplitude do movimento. Como o cosseno toma valores entre -1 e 1 , o alongamento varia entre valores extremos de $-y_0$ e y_0 .²
- θ_0 é a **fase** inicial.

À primeira vista é surpreendente encontrarmos aqui cossenos e senos, normalmente associados a ângulos, num movimento em que tudo se desenrola numa única direcção. Vejamos primeiro se compreendemos o que significam estas expressões.

Suponhamos que $y_0 = 0,1\text{ m}$ e que a **fase** $\theta(t) \equiv \omega t + \theta_0 = 30$. Quanto vale $y(t)$? Basta calcular $\cos(30)$, o que com o recurso a uma máquina calculadora é relativamente simples. Mas 30 quê? Graus ou radianos?

É importante referir que o que temos que calcular é o cosseno (ou o seno) de um ângulo de 30 **radianos**, nunca 30° ! O resultado é

$$y(t) = 2 \times \cos(30) = 0,309\text{ m}.$$

A definição das **funções** $\text{sen}(s)$ e $\text{cos}(s)$ em que s é qualquer número real é recordada na Caixa 6.2; a ligação com o conceito mais familiar de seno ou cosseno de um ângulo é a seguinte:

O valor da função $\text{sen}(s)$ ($\text{cos}(s)$) é o seno (cosseno) de um ângulo de s radianos.

Usando as seguintes propriedades do seno e cosseno,

$$\begin{aligned} \text{sen}\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) &= \text{cos}(\theta) \\ \text{cos}\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) &= -\text{sen}(\theta), \end{aligned}$$

²Nota: y_0 , a amplitude, não deve ser confundido com o valor inicial, $y(0)$. Só são idênticos se o alongamento for máximo em $t = 0$.

▷ Os físicos preferem radianos!

podemos escrever $y(t)$ e $v_y(t)$ numa forma diferente, mas inteiramente equivalente,

$$y(t) = y_0 \operatorname{sen}(\omega t + \theta'_0) \quad (6.10)$$

$$v_y(t) = \omega y_0 \cos(\omega t + \theta'_0), \quad (6.11)$$

sendo $\theta'_0 = \theta_0 + \pi/2$.

As funções $\operatorname{sen}(s)$ e $\cos(s)$ têm um período 2π (ver Caixa 6.2). Se a fase, $\theta(t) = \omega t + \theta_0$, variar de 2π , os valores de alongamento e velocidade repetem-se. Assim, o período T do movimento harmónico simples é definido por

$$\theta(t + T) - \theta(t) = \omega T = 2\pi,$$

ou seja,

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Repare-se que a frequência angular, ω , e o período, T , são determinados pela equação de movimento. Os valores de y_0 e θ_0 dependem da maneira como é iniciado o movimento, ou seja dos valores iniciais de y e v_y .

$\mathcal{E}\mathcal{T}\mathcal{V}_7$: No instante $t = 0$, temos $y = 10 \text{ cm}$ e $v_y = 0$, para oscilador com $k = 20 \text{ N m}^{-1}$ e $m = 2 \text{ kg}$. Quais são as funções $y(t)$ e $v_y(t)$? Quanto vale a velocidade em $t = 2 \text{ s}$?

6.3.2 O Movimento circular e o MHS

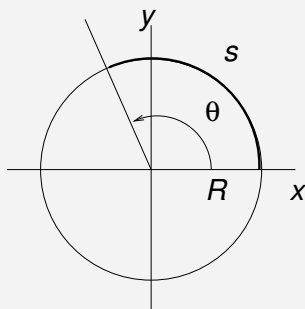
Existe, como dissemos, uma relação muito interessante entre o movimento circular uniforme e o movimento harmónico simples:

As projecções nos eixos coordenados de um movimento circular uniforme são movimentos harmónicos simples.

Este resultado demonstra-se com muita facilidade e vai permitir-nos compreender melhor a forma das equações do movimento harmónico simples.

■ Funções trigonométricas ■

O valor de um ângulo em radianos é o comprimento do arco correspondente a dividir pelo raio do círculo, ou, o que é equivalente, o comprimento de um arco de um círculo de raio unitário (círculo trigonométrico).



O ângulo em radianos, θ , é a razão s/R em que s é o comprimento do arco e R raio do círculo.

Como o perímetro de um círculo de raio unitário é 2π , poderia parecer que os ângulos em radianos só tomam valores entre 0 e $2\pi \approx 6,283$. Contudo, não há qualquer dificuldade em considerar um ângulo superior a 2π : corresponde ao comprimento de um arco descrito dando mais que uma volta completa ao círculo com início no eixo Ox , rodando no sentido oposto ao dos ponteiros do relógio. Um ângulo negativo corresponde a percorrer o círculo no sentido dos ponteiros do relógio.

Deste modo, podemos associar um ponto no círculo unitário a qualquer número real, s . A respectiva coordenada no eixo Ox é $\cos(s)$ e no eixo Oy , $\text{sen}(s)$: isto define o valor destas duas funções para qualquer argumento real. Naturalmente, como s e $s + n \times 2\pi$ (n inteiro) definem a mesma posição no círculo trigonométrico, temos:

$$\begin{aligned}\cos(s + 2n\pi) &= \cos(s) & n, \text{ inteiro} \\ \text{sen}(s + 2n\pi) &= \text{sen}(s) & n, \text{ inteiro.}\end{aligned}$$

As funções trigonométricas têm período 2π .

Caixa 6.2: Definição das funções trigonométricas.

A frequência angular

Um corpo em movimento circular uniforme descreve ângulos iguais em intervalos de tempo iguais. Se $\theta(t)$ for o ângulo (em radianos) medido em relação ao eixo Ox , a velocidade angular

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

é constante. Se a derivada de $\theta(t)$ em ordem ao tempo é constante, sabemos que $\theta(t)$ tem a forma³:

$$\theta(t) = \omega t + \theta_0$$

em que θ_0 designa o ângulo com o eixo Ox em $t = 0$.

O corpo efectua uma volta completa quando θ variar de 2π . Ou seja, num período, $\Delta t = T$,

$$\Delta\theta = \omega\Delta t = \omega T = 2\pi$$

e

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f.$$

A frequência, $f = 1/T$, é o número de revoluções por segundo.

A velocidade linear é

$$v = \frac{2\pi R}{T} = \omega R = 2\pi f R. \quad (6.12)$$

Projectões nos eixos coordenados

Para o movimento circular uniforme, sabemos a direcção, sentido e módulo da força, a força centrípeta: é dirigida para o centro da trajectória e vale mv^2/R . Projectando a força nos eixos coordenados (ver fig. 6.11),

$$\begin{aligned} F_x &= -F \cos(\theta(t)) \\ F_y &= -F \text{sen}(\theta(t)), \end{aligned}$$

e usando $v = \omega R$ e $F = mv^2/R$, é fácil obter

$$\begin{aligned} F_x &= -m\omega^2 R \cos(\theta(t)) = -m\omega^2 x(t) \\ F_y &= -m\omega^2 R \text{sen}(\theta(t)) = -m\omega^2 y(t), \end{aligned} \quad (6.13)$$

³Um gráfico de θ em função de t é uma recta (declive constante).

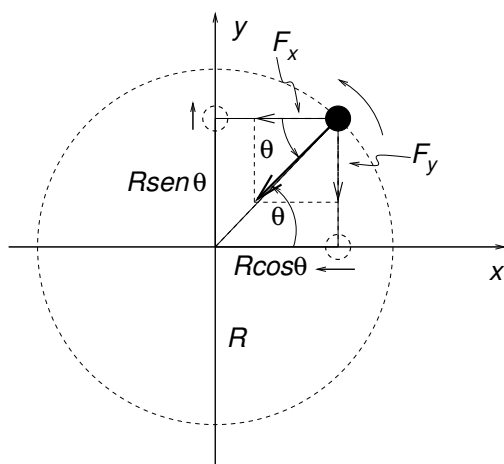


Figura 6.11: As projecções da força centrípeta nos eixos Ox e Oy , F_x e F_y , são proporcionais a $x(t)$ e $y(t)$, respectivamente.

em que $x(t)$ e $y(t)$ são as coordenadas do corpo em movimento circular uniforme.

Pela segunda lei de Newton:

$$a_x(t) = -\omega^2 x(t) \quad (6.14)$$

$$a_y(t) = -\omega^2 y(t). \quad (6.15)$$

As equações de movimento segundo qualquer dos eixos coordenados são as de um oscilador harmónico simples em que $\omega^2 = k/m$.

Mas conhecemos exactamente as soluções destas equações: bastanos calcular as coordenadas do movimento circular uniforme.

O vector de posição do corpo é

$$\vec{r} = R \cos(\theta(t)) \hat{i} + R \sin(\theta(t)) \hat{j};$$

as suas coordenadas $x(t)$ e $y(t)$ são dadas por:

$$x(t) = R \cos(\theta(t)) = R \cos(\omega t + \theta_0) \quad (6.16)$$

$$y(t) = R \sin(\theta(t)) = R \sin(\omega t + \theta_0). \quad (6.17)$$

Já tínhamos visto atrás que estas duas formas são equivalentes: correspondem apenas a diferentes escolhas da fase inicial.

Compreendemos agora o aparecimento das funções trigonométricas (eqs. 6.16 e 6.17) na solução da equação de movimento do oscilador harmónico (eqs. 6.14 ou 6.15):

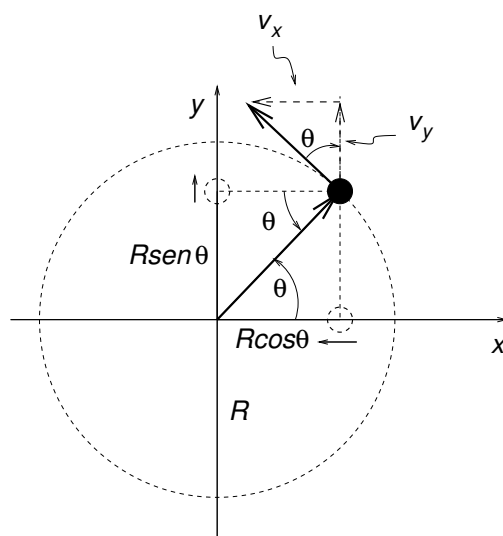


Figura 6.12: O vector velocidade e o vector de posição de um movimento circular fazem um ângulo de $\pi/2$.

O movimento harmónico simples é a projecção de um movimento circular. A fase é o ângulo (em radianos) do movimento circular relativamente a um eixo coordenado.

Podemos ainda usar o movimento circular para determinar a forma das velocidades correspondentes às coordenadas das equações 6.16 e 6.17.

A velocidade é tangente à trajectória e perpendicular a \vec{r} . Então (ver figura 6.12)

$$\begin{aligned}v_x(t) &= -v \operatorname{sen}(\theta(t)) \\v_y(t) &= v \operatorname{cos}(\theta(t))\end{aligned}$$

Usando a relação entre a velocidade linear e angular, $v = \omega R$,

$$\begin{aligned}v_x(t) &= -\omega R \operatorname{sen}(\omega t + \theta_0) \\v_y(t) &= \omega R \operatorname{cos}(\omega t + \theta_0).\end{aligned}$$

6.3.3 Resumo

A solução de uma equação de movimento do oscilador harmónico,

$$a_y(t) = -\frac{k}{m}y(t)$$

pode escrever-se numa de duas formas equivalentes:

$$\begin{aligned}y(t) &= y_0 \cos(\omega t + \theta_0) \\v_y(t) &= -\omega y_0 \operatorname{sen}(\omega t + \theta_0)\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}y(t) &= y_0 \operatorname{sen}(\omega t + \theta'_0) \\v_y(t) &= \omega y_0 \cos(\omega t + \theta'_0)\end{aligned}$$

em que $\theta'_0 = \theta_0 + \pi/2$.

Este movimento é a projecção de um movimento circular de raio y_0 num eixo coordenado. A fase $\theta(t) = \omega t + \theta_0$ é o ângulo, em radianos, descrito pelo movimento circular em relação a um dos eixos coordenados. A velocidade ou frequência angular

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

vale

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

e o período

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

6.3.4 Imaginação em ciência

Será que sempre que temos um oscilador harmónico existe algures um corpo em movimento circular? Com certeza que não. Contudo, sempre que pretendemos compreender aspectos de um fenómeno físico, somos livres de imaginar as situações que quisermos, **desde que sejam compatíveis** com as leis da Física. Neste caso foi útil imaginar um movimento circular e projectá-lo nos eixos para descobrir as soluções do movimento oscilatório harmónico.

A imaginação e a criatividade têm um papel em ciência não menos importante do que o que têm nas artes e humanidades. No entanto, a criatividade e imaginação científicas têm que restringir-se a cenários e situações compatíveis com as leis da Física (as conhecidas ou as que se pretendem descobrir). Por isso exigem uma enorme disciplina intelectual e profundos conhecimentos técnicos. Ao fim ao cabo, tal como nas artes!

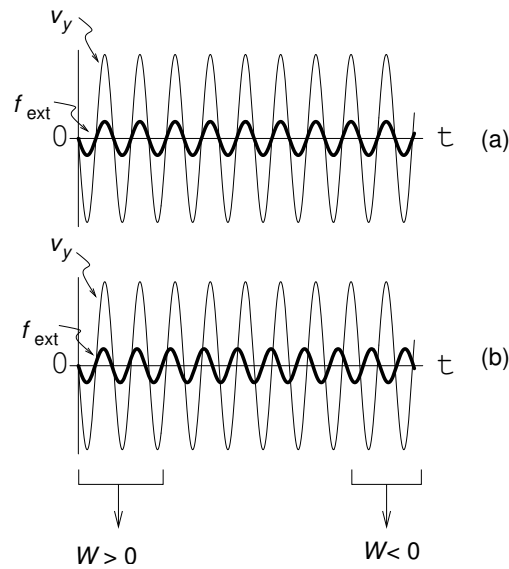


Figura 6.14: (a) Se a força externa, f_{ext} , tiver o mesmo período que a velocidade do oscilador, o trabalho realizado pode ser sempre positivo. Se o período for diferente (menor no caso (b)), há ciclos de trabalho positivo e ciclos de trabalho negativo.

6.4 Ressonância

O último tópico do nosso estudo de oscilações é um fenómeno de capital importância quer em Física Clássica quer em Física Moderna: o fenómeno da **ressonância**.

Imaginemos uma força externa, \vec{f}_{ext} , aplicada ao oscilador que temos vindo a considerar. Para ilustrar o que é o fenómeno de ressonância, precisamos de considerar uma força periódica, como a que resulta, por exemplo, da interacção com outro oscilador. Para simplificar, vamos supor que esta força externa tem a direcção do movimento do oscilador e é de intensidade muito menor que a força restauradora: pouco altera o movimento da esfera.

Se, porventura, a força externa $\vec{f}_{ext}(t)$ e a velocidade da esfera, $\vec{v}(t)$, tiverem o mesmo sentido, a força $\vec{f}_{ext}(t)$ realiza trabalho positivo sobre o oscilador (força e deslocamento paralelos) e a energia deste aumenta; se os sentidos forem opostos, a energia do oscilador diminui.

A velocidade do oscilador troca de sentido em cada meio período, $T/2$. **Se a força externa tiver o mesmo período do osci-**

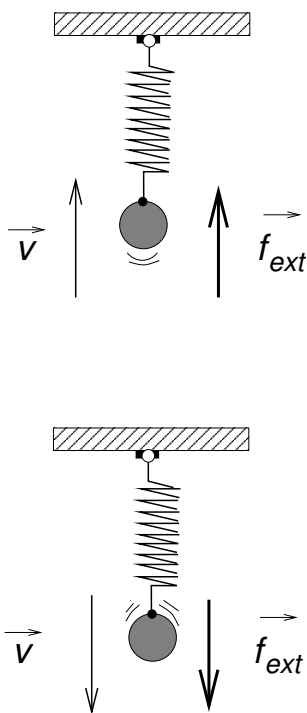


Figura 6.13: Se a força tiver o mesmo período do oscilador, pode realizar sempre trabalho positivo, transferindo energia para o oscilador.

lador⁴, o trabalho realizado sobre o oscilador mantém-se sempre positivo: a energia e a amplitude de oscilação vão aumentando em cada ciclo. Contudo, se o período da força não for o mesmo do oscilador, mesmo que comecemos com uma força com o sentido da velocidade, ao fim de algum tempo haverá uma diferença de fase de π e o sentido da força e da velocidade são opostos. Haverá oscilações em que a energia aumenta e outras em que a energia diminui (fig. 6.14).

O resultado deste efeito é o fenómeno da ressonância:

Quando a frequência da força externa coincide com a do oscilador, a amplitude deste pode crescer para valores muito elevados, mesmo que a intensidade da força externa seja muito pequena. O oscilador recebe energia em todos os ciclos de oscilação. Se as frequências não forem iguais efeito da força é muito menos importante.

6.4.1 Exemplos de ressonâncias

O fenómeno da ressonância foi aqui apresentado usando a linguagem de forças e deslocamentos da Física Clássica. Contudo, trata-se de um conceito que continua a ter em Física Moderna um papel tão ou mais importante que em Física Clássica.

Sintonização

A sintonização de um rádio consiste em variar a frequência de um oscilador interno, até que a respectiva frequência coincida com a da estação emissora pretendida. Quando isso acontece a amplitude do oscilador interno do rádio aumenta muito e podemos ouvir a estação pretendida. Vibrações com outras frequências quase não transferem energia para o rádio.

Instrumentos musicais

O elemento produtor de som de um violino ou de um piano é uma corda. Mas uma corda solta, isolada, é quase inaudível; o som de um piano ou de um violino enche enormes auditórios sem qualquer necessidade de amplificação.

⁴Recordemo-nos que o período de um oscilador harmónico não varia com a amplitude.

Na realidade, todo o instrumento vibra e, em consequência, a vibração é transmitida muito mais eficazmente para o ar. A vibração do instrumento resulta de fenómenos de ressonância. Cada instrumento tem inúmeras vibrações possíveis, com frequências diferentes. As oscilações ressonantes com a vibração da corda são as que terão maior amplitude. O desenho de instrumentos musicais determina o tipo e a frequência das suas oscilações; é uma arte que exige profundos conhecimentos e muita experiência, pelo que os preços de bons instrumentos podem ser elevadíssimos.

Espectros de emissão e absorção

No décimo ano vimos que os átomos no estado gasoso só absorvem radiação com certas frequências. Os gases das camadas exteriores do Sol, por exemplo, absorvem a radiação a certas frequências e o espectro solar apresenta riscas escuras para essas frequências. Mas os mesmos átomos, ao emitir, emitem apenas nas frequências correspondentes às riscas de absorção. O espectro de emissão de um dado elemento tem riscas de emissão nas frequências onde aparecem as riscas negras no espectro de absorção.

Isto é também um fenómeno de ressonância. O átomo pode ser visto como um conjunto de osciladores. Quando oscila emite radiação às frequências dos seus osciladores. Quando incide radiação sobre o átomo, esta é absorvida fortemente se estiver em ressonância com um dos osciladores atómicos: ou seja, as riscas de emissão e absorção ocorrem às mesmas frequências.

6.5 Respostas às \mathcal{ETV}_s

- 6.1. \mathcal{ETV}_1 : Se $l > l_0$, $l - l_0 > 0$, a mola está distendida e a força tem o sentido do semi-eixo positivo Oy , $F_y > 0$. Ao contrário, se $l < l_0$, $l - l_0 < 0$, a mola está comprimida e exerce uma força com o sentido vertical descendente, $F_y < 0$. O sinal da eq. 6.1 está correcto. Se trocássemos o sentido do eixo Oy teríamos $F_y < 0$ para uma força de sentido ascendente e $F_y > 0$ para uma força de sentido descendente. Logo as equações seriam:

$$\begin{aligned}\vec{P} &= mg\hat{j} \\ \vec{F}_e &= -k(l - l_0)\hat{j}.\end{aligned}$$

- 6.2. \mathcal{ETV}_2 : Não é, porque a aceleração não é constante. A aceleração só vale $(-k/m)y_0$ se $y = y_0$. Como y varia durante o movimento, a aceleração varia e diminui em módulo à medida que a esfera se aproxima da posição de equilíbrio ($y = 0$).

6.3. \mathcal{ETV}_3 : Os valores que se obtêm são os seguintes:

$\theta/^\circ$	θ/rad	$E_p(\text{exacta})/\text{J}$	$E_p(\text{aprox})/\text{J}$
5	0,0873	0,0373	0,0372
10	0,1745	0,1489	0,1478
15	0,2618	0,3339	0,3282
20	0,3491	0,5910	0,5732
25	0,4363	0,9182	0,8752
30	0,5236	1,3130	1,2250

6.4. \mathcal{ETV}_4 : ver texto (fig. 6.9, da página 147).

6.5. \mathcal{ETV}_5 : O gráfico de energias em função do tempo tem o aspecto do da figura 6.15. O período é metade do de $y(t)$. Os valores de energia cinética e potencial são iguais para valores simétricos (y e $-y$) do alongamento.

6.6. \mathcal{ETV}_6 : Usando um sistema de eixos com origem na altura de equilíbrio da barra, se esta se deslocar verticalmente de y , a variação de comprimento de cada mola é:

$$\Delta l = -y.$$

Como a força exercida por cada mola é dada por

$$F_y = k(l - l_0)$$

a variação das forças exercidas por cada mola é:

$$\Delta F_y = k\Delta l = -ky.$$

Na posição de equilíbrio as forças das molas são canceladas pelo peso da barra. O peso não varia quando a barra se desloca. Então, a resultante das forças exercidas na barra (força restauradora) é:

$$R_y = 2\Delta F_y = -2ky$$

e a equação de movimento é a de um oscilador harmónico simples:

$$a_y(t) = -\frac{2k}{m}y(t).$$

A constante de força efectiva é $2k$. A frequência angular, ω , e a frequência f , valem:

$$\begin{aligned}\omega &= \sqrt{\frac{2k}{m}} = 14,1 \text{ s}^{-1} \\ f &= \frac{\omega}{2\pi} = 2,25 \text{ Hz.}\end{aligned}$$

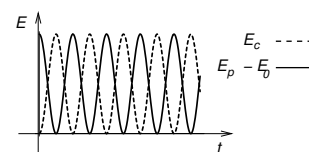


Figura 6.15: Energias cinética e potencial em função do tempo para o caso de um oscilador sem dissipação.

Para calcular a força restauradora em basta considerar as **variações** de cada força quando o sistema se afasta do equilíbrio. Por definição, na posição de equilíbrio, a resultante de todas as forças é nula.

- 6.7. $\mathcal{E}\mathcal{T}\mathcal{V}_7$: Como $k = 20 \text{ Nm}^{-1}$ e $m = 2 \text{ kg}$, $\omega = \sqrt{k/m} = \sqrt{10} \text{ s}^{-1}$. Usando as expressões gerais com $t = 0$,

$$\begin{aligned} y(0) &= y_0 \cos(\theta_0) \\ v_y(0) &= -\omega y_0 \sin(\theta_0) \end{aligned}$$

Como $v_y(0) = 0$, podemos escolher $\theta_0 = 0$, o que dá

$$y(0) = y_0 = 0,1 \text{ m.}$$

Assim,

$$\begin{aligned} y(t) &= 0,1 \times \cos(\sqrt{10}t) \\ v_y(t) &= -0,1 \times \sqrt{10} \times \sin(\sqrt{10}t). \end{aligned}$$

Para $t = 2$,

$$v_y(2) = -0,1 \times \sqrt{10} \times \sin(2\sqrt{10}) = -0,013 \text{ m s}^{-1}.$$

(Não esquecer que temos de calcular o seno de $2\sqrt{10}$ **radianos!**)

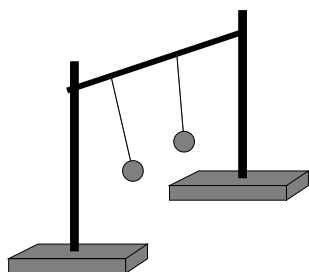


Figura 6.16: Se os períodos forem iguais, os dois pêndulos mantêm-se sincronizados.

6.6 Actividades questões e problemas

6.1. Isocronismo de oscilações do pêndulo.

Usando duas massas marcadas idênticas e o mesmo comprimento de fio, construir dois pêndulos idênticos e suspendê-los lado a lado. Pô-los a oscilar com amplitudes diferentes e verificar se o período é o mesmo.

6.2. Movimento Harmónico Simples

Ver ficha de actividade A42.

6.3. Funções trigonométricas

Como varia o gráfico de $y(t)$ quando variam os parâmetros y_0 , amplitude, $\omega = 2\pi f$, frequência angular, e θ_0 , fase inicial?

Para responder a esta pergunta abrir com o Microsoft Excel® o ficheiro `sinais_harmonicos.xls` que se encontra no CD **Sons**, pasta `fich_excel`, e seguir as instruções relativas ao primeiro exercício.

6.4. Afinar uma guitarra sem ouvir

O fenómeno de ressonância é muito fácil de observar numa guitarra. Se a guitarra estiver afinada, a sexta corda, a mais grave, pisada no quinto traste, deve emitir a mesma nota (Lá) que a quinta corda. Se isso acontecer, ao dedilhar a sexta corda pisada no quinto traste, a quinta começa a vibrar “por simpatia”. Na realidade começa a vibrar porque fica sujeita a uma perturbação externa **com a sua própria frequência de vibração**: é um fenómeno de ressonância. Se variarmos a tensão da quinta corda, podemos “ver” quando fica afinada pelo facto de vibrar em “simpatia” com a sexta corda pisada no quinto traste. Experimente!

6.6.1 Questões

6.1. Usando um caso concreto de oscilador explique o significado de cada um dos seguintes termos:

(a) Amplitude, alongamento, período, força restauradora, amortecimento.

6.2. No texto mostra-se que a energia de um pêndulo, para pequenas oscilações, tem a forma

$$E = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}\frac{mg}{l}x^2,$$

em que x é a coordenada horizontal do pêndulo medida em relação ao ponto de equilíbrio (ver fig. 6.8 da página 6.8) o que faz o pêndulo equivalente a um oscilador harmónico simples.

(a) Qual é a constante de força de um pêndulo?

(b) A frequência de oscilação de um pêndulo depende da sua massa? De que parâmetros depende?

6.3. Um oscilador harmónico simples, ao fim de 100 ciclos de oscilação, tem uma amplitude que é metade da inicial.

(a) Que fracção da sua energia inicial já dissipou?

6.4. Duas massas marcadas de 100 g e 200 g oscilam presas a molas idênticas. A massa de 100 g tem uma amplitude de oscilação 1,5 vezes superior à da outra.

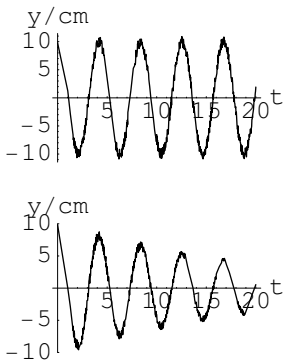


Figura 6.17: Qual das curvas corresponde à massa com cartolina?

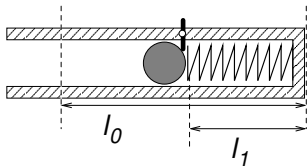


Figura 6.18: Quanto tempo dura o lançamento?

- (a) Em qual dos casos é maior a energia de oscilação (relativamente à respectiva configuração de equilíbrio)? Justifique.

6.5. Depois de fazer a actividade 6.2, um estudante resolveu colar um quadrado de cartolina de $4 \times 4 \text{ cm}^2$ na base da massa suspensa na mola e repetir o registo do alongamento da massa.

- (a) Qual das curvas da figura 6.17 corresponde à experiência com a cartolina? Justificar cuidadosamente.

6.6. O dispositivo da figura 6.18 usa uma mola comprimida para lançar um projectil. Quando a mola é libertada distende-se empurrando a esfera.

- (a) Que relação existe entre o tempo que decorre até a esfera descolar da mola, e o período de oscilação que teria o sistema esfera-mola, se a esfera estivesse presa à mola?
 (b) Se a mola for ainda mais comprimida o tempo de lançamento varia?

6.7. Uma estudante precisava de uma medida rápida da constante de uma mola. Pendurou nela uma massa marcada de 200 g e cronometrou 20 oscilações do sistema.

- (a) Explicar como é que este procedimento permite calcular a constante da mola.

6.6.2 Problemas

6.1. Um cilindro de madeira, de altura $h = 6 \text{ cm}$ e diâmetro de base de 8 cm, flutua à superfície da água. A massa volúmica da madeira é de $0,7 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$.

- (a) Que altura do cilindro fica dentro de água no equilíbrio (altura imersa)?
 (b) Qual é o valor da constante de força restauradora, para pequenas variações da altura imersa do cilindro?
 (c) Qual é o período de oscilação do cilindro?

Sugestão: calcular a força sobre o cilindro para uma altura imersa for $h_i + x$, em que h_i é a altura imersa na posição de equilíbrio.

6.2. No gráfico da figura 6.19 registou-se o alongamento de um oscilador de massa e mola vertical.

- Obter do gráfico os valores do período e da amplitude.
- A massa suspensa valia $m = 150$ g. Qual era o valor da constante da mola?
- Qual era o valor máximo de velocidade da massa suspensa durante as oscilações?

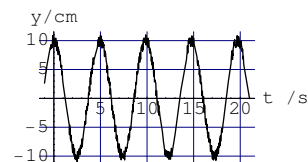


Figura 6.19: Alongamento em função do tempo.

6.3. Um pêndulo constituído por uma esfera de $m = 0,5$ kg, presa num fio de comprimento $l = 1,0$ m, oscila com uma amplitude angular de 5° .

- Qual é o período da oscilação?
- Quanto vale a energia armazenada na oscilação (relativamente à configuração de equilíbrio)?
- Se em cada ciclo de oscilação o pêndulo dissipar 5% da sua energia, qual é a amplitude angular de oscilação ao fim de 20 períodos?

6.4. Uma estudante precisava de uma medida rápida da constante de uma mola. Pendurou nela uma massa marcada de 200 g e cronometrou 20 oscilações completas do sistema em 15 segundos.

- Qual é a constante da mola?
- Se tivesse usado uma massa de 100 g, quanto tempo teriam demorado as 20 oscilações completas?

6.5. No gráfico da figura 6.20 registou-se a velocidade de um oscilador harmónico simples.

- Obter do gráfico os valores do período e da amplitude (valor máximo do alongamento).
- A massa suspensa valia $m = 150$ g. Qual era o valor da constante da mola?
- Qual é a energia total deste oscilador (medida relativamente ao estado de equilíbrio).

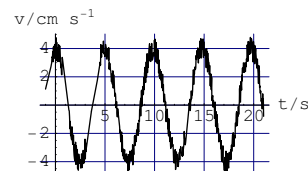


Figura 6.20: Velocidade em função do tempo.

6.6. A força exercida por um arco de competição na flecha é proporcional à distância de retracção da flecha (fig. 6.21). Dados de um arco de competição dão uma força de 171 N para uma distância de 41 cm. A massa de uma flecha é de 20,1 g.

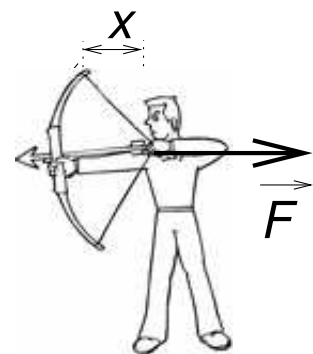


Figura 6.21: O arqueiro puxa a seta de uma distância x . A força que tem que exercer é simétrica da força do arco na flecha.

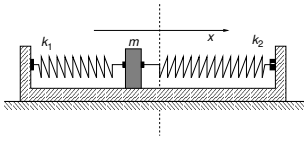


Figura 6.22: Qual é frequência deste oscilador?

- (a) Quanto tempo demora a flecha a perder o contacto com o arco, depois de largada?
- (b) Qual é a velocidade de saída da flecha, para uma retracção de 41 cm?

(Ver questão 6.6.)

- 6.7. O corpo de massa $m = 0,5 \text{ kg}$ da figura 6.22 desliza sem atrito numa mesa horizontal ligado a duas molas de constantes $k_1 = 10 \text{ N m}^{-1}$ e $k_2 = 20 \text{ N m}^{-1}$. Seja $x(t)$ a sua coordenada na direcção paralela à mesa, medida relativamente à posição de equilíbrio.

- (a) Mostre que a força restauradora é proporcional a $x(t)$,

$$F = -kx(t),$$

e calcule a constante de força respectiva, k .

- (b) Determine a frequência de oscilação do corpo.
- (c) Se os suportes onde estão ancoradas as molas estivessem mais próximos, reduzindo o comprimento das molas, a frequência da oscilação seria alterada?

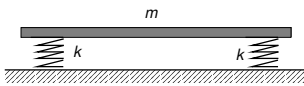


Figura 6.23: Qual é frequência deste oscilador?

- 6.8. Uma mesa óptica de massa $m = 500 \text{ kg}$, está suportada em quatro molas idênticas, fixas ao solo e à mesa, de constante de força, $k = 800 \text{ N cm}^{-1}$.

- (a) Qual é a frequência das oscilações verticais da mesa?

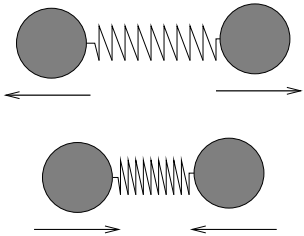


Figura 6.24: Qual é frequência deste oscilador?

- 6.9. As forças entre dois átomos de uma molécula diatómica, como O_2 ou H_2 podem ser vistas como elásticas, como se existisse uma mola entre os dois átomos. A molécula pode oscilar com deslocamentos dos dois átomos em relação à respectiva posição de equilíbrio, com a direcção do eixo da molécula e de sentidos opostos.

- (a) Se um dos átomos tiver um deslocamento $x(t)$ relativamente à sua posição de equilíbrio e o outro $-x(t)$ em relação à sua, qual é variação de comprimento da “mola”?
- (b) Escrever a equação de movimento para um dos átomos e obter uma expressão para a frequência desta oscilação.
- (c) No caso da molécula de H_2 , a frequência desta oscilação é $f = 1,3 \times 10^{14} \text{ Hz}$. Qual é o valor da constante de força da ligação H-H?

6.10. Um oscilador de frequência angular $\omega = 2 \text{ s}^{-1}$, recebe, na posição de equilíbrio, $x(0) = 0$, um impulso tal que a sua velocidade inicial é $v_x(0) = 0,2 \text{ m s}^{-1}$.

- (a) Escrever as equações do alongamento, $x(t)$, e da velocidade, $v_x(t)$, da oscilação que resulta deste impulso.

Capítulo 7

Sistemas de partículas

Nas Olimpíadas de Los Angeles, em 1984, Greg Louganis, um jovem americano de 24 anos, espantou o público ao ganhar as medalhas de ouro de salto de plataforma e de trampolim, com um sucessão de saltos praticamente perfeitos, de uma elegância inexcelável. Quatro anos mais tarde, em Seul, repetiu a proeza, contra jovens de metade da sua idade mesmo depois de ter aberto a cabeça ao embater no trampolim, num salto de qualificação.

Contudo, os saltos de Louganis e dos seus competidores, com as suas piruetas e cambalhotas, ou os famosos “voos” dos guarda-redes, decorrem sob acção de uma força externa constante, o seu peso, tal como no caso da queda de uma esfera. Como podem, então, os saltadores, os ginastas, os bailarinos, os atletas, executar em voo movimentos tão complexos? Que nos podem dizer a leis de Newton sobre esta questão?

O movimento de um sistema complexo, como o corpo humano, raramente se reduz a um movimento de translação em que todas as partes do corpo têm o mesmo deslocamento, a mesma velocidade e a mesma aceleração em todos os instantes. Partes diferentes do corpo têm acelerações diferentes em direcções variadas. Tal como no caso dos fluidos, as forças internas têm um papel muito importante na determinação de movimentos complexos de sistemas constituídos por muitas partes em interacção.

Em Física Newtoniana, modelam-se estas situações usando o conceito de **sistema de partículas**. Uma partícula é um sistema suficientemente simples para que o seu movimento se possa representar pelo deslocamento de um ponto. Um corpo arbitrário é representado como sendo um conjunto (sistema) de partículas actuadas quer por **forças internas**, derivadas da interacção com

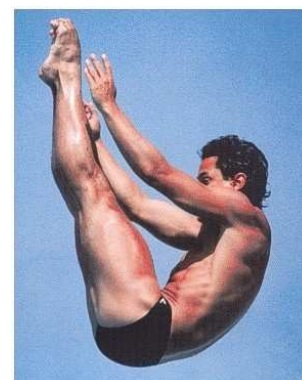


Figura 7.1: Apesar dos seus movimentos complexos, a única força externa significativa sobre um saltador é o seu peso.

as outras partículas do sistema, quer por **forças externas**, resultantes da interacção com outros corpos.

Neste capítulo vamos considerar a seguinte questão:

Que características do movimento de um sistema de partículas podemos obter do conhecimento das suas forças externas apenas?

A resposta a esta pergunta é muito simples e interessante.

Por mais complexo que seja um sistema e o seu movimento, as massas e as posições das partículas que o constituem permitem-nos calcular a posição de um ponto, o **centro de massa**, \vec{r}_{cm} , cujo movimento é o de uma partícula material, com massa igual à massa total do sistema, sujeita à resultante das **forças externas** aplicadas ao sistema.

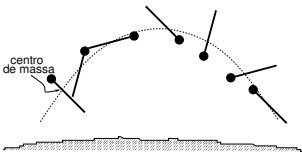


Figura 7.2: Embora o movimento de um corpo em voo possa ser complexo, o seu centro de massa tem o movimento parabólico habitual de uma queda livre.

Este resultado justifica, finalmente, por que razão podemos aplicar com tanto sucesso o modelo de partícula material aos movimentos de corpos muito complexos. Um aspecto do movimento, especificamente, o movimento do centro de massa, **é o movimento de uma partícula material**, em relação ao qual podemos ignorar as forças internas.

Por outras palavras, nem arte de Greg Louganis, nem o poder de Michael Jordan, nem a agilidade de Vítor Baía, podem impedir os respectivos centros de massa de cair com uma aceleração de $9,8 \text{ m s}^{-2}$ na direcção vertical¹.

7.1 Momento linear

7.1.1 Colisão de dois carros

Quando estudámos colisões entre dois carros, no 10^o ano, considerámos que cada um deles podia ser caracterizado pelo deslocamento de um ponto; uma vez que o movimento de cada carro era de translação, todos os pontos do carro tinham o mesmo deslocamento. Assim, neste sistema, em vez de uma partícula temos duas. Um bom sítio para começar.

¹Contudo, veremos que o centro de massa de um atleta não tem uma posição fixa no seu corpo. Depende da configuração do corpo, se está encolhido, estendido, membros flectidos, estendidos, etc.

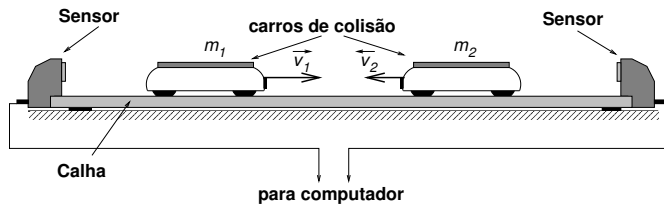


Figura 7.3: Colisão de dois carros. Na medida em que cada um deles tem um movimento de translação, este sistema é constituído por duas partículas.

Ignoremos por um momento as forças externas sobre os carros: o respectivo peso é anulado pela reacção normal da calha e, em primeira aproximação, o atrito é desprezável. Para o primeiro carro,

$$\vec{F}_1 = m_1 \vec{a}_1,$$

em que \vec{F}_1 é a força que sobre ele exerce o segundo carro. Do mesmo modo,

$$\vec{F}_2 = m_2 \vec{a}_2,$$

em que \vec{F}_2 é a força exercida no segundo carro pelo primeiro. A terceira lei de Newton diz-nos que estas duas forças, \vec{F}_1 e \vec{F}_2 , que são um par acção-reacção, têm resultante nula. Ou seja,

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$$

e, portanto,

$$m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2 = 0.$$

Recordando que a aceleração é a derivada da velocidade, vem

$$m_1 \frac{d\vec{v}_1}{dt} + m_2 \frac{d\vec{v}_2}{dt} = 0. \quad (t \text{ qualquer})$$

As propriedades da operação de derivação referidas no Capítulo 2 permitem-nos escrever esta equação na forma (as massas são constantes, independentes do tempo):

$$\frac{d}{dt} (m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2) = 0 \quad (t \text{ qualquer}).$$

Dizer que uma grandeza tem derivada temporal nula (em qualquer instante) é o mesmo que dizer que ela não varia, ou seja:

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = \text{constante}.$$

Em conclusão: multiplicando a massa de cada carro pelo respectivo vector velocidade e somando os dois vectores, $m_1\vec{v}_1$ e $m_2\vec{v}_2$, os **momentos lineares de cada carro**, obtemos uma grandeza que não varia no tempo: essa grandeza é o **momento linear** do sistema. Repare-se que a única propriedade das forças internas que usámos foi a terceira lei de Newton. Esta lei de conservação de momento linear é, portanto, tão geral como a terceira lei de Newton.

ETV₁: Na Actividade A7 do 10^o ano estudámos duas colisões muito simples entre carros de igual massa, $m_1 = m_2 = m$. Um carro era lançado, com velocidade $\vec{v} = v_0\hat{i}$, contra o outro, inicialmente parado. Numa colisão do primeiro tipo o carro lançado ficava parado após a colisão. No segundo tipo de colisão os carros seguiam juntos após a colisão. Usando a conservação de momento linear, responder às seguintes perguntas.

- a) Qual é velocidade do carro que estava inicialmente parado após uma colisão do primeiro tipo?
- b) Qual é a velocidade conjunta dos dois carros após a colisão do segundo tipo ?

7.1.2 Conservação de momento linear

O resultado anterior é facilmente estendido para qualquer sistema de partículas. Sobre cada partícula do sistema exercem-se:

- forças externas, devidas a corpos exteriores ao sistema;
- forças internas, resultantes das interacções com as outras partículas do sistema.

Se somarmos **todas as forças**, sobre todas as partículas do sistema, podemos agrupar as forças internas em pares acção-reacção, cuja soma é zero. O par de uma força externa é exercido sobre partículas exteriores ao sistema e essas forças não são somadas (ver fig. 7.4). Assim a soma de **todas as forças** sobre **todas as**

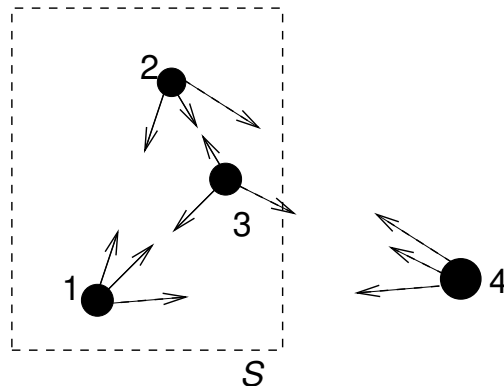


Figura 7.4: Se somarmos todas as forças que actuam nas partículas do sistema S , 1, 2 e 3, as forças internas (a cheio) cancelam, pois podem ser agrupadas em pares acção–reação. Ficam apenas as forças externas (a tracejado), pois os pares destas são exercidos em partículas que não pertencem a S .

partículas de um sistema, é a resultante de todas as **forças externas**:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots = \vec{F}_{\text{ext}}$$

Usando a segunda lei,

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots = m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 + \dots,$$

vem

$$m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 + \dots = \vec{F}_{\text{ext}}.$$

Ora,

$$\begin{aligned} m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 + \dots &= \frac{d}{dt} (m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \dots) \\ &= \frac{d\vec{p}_{\text{sist}}}{dt} \end{aligned}$$

em que \vec{p}_{sist} é o momento linear total do sistema:

$$\vec{p}_{\text{sist}} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \dots \quad (7.1)$$

Assim:

$$\frac{d\vec{p}_{\text{sist}}}{dt} = \vec{F}_{\text{ext}}. \quad (7.2)$$

No caso em que as forças **externas** têm resultante nula, obtemos a lei de conservação do momento linear,

$$\vec{p}_{\text{sist}} = \text{constante} \quad (\vec{F}_{\text{ext}} = 0).$$

As forças internas de um sistema, **em circunstância alguma**, podem alterar o seu momento linear total. Este só varia por acção de forças externas ao sistema.

$\mathcal{E}\mathcal{T}\mathcal{V}_2$: É possível variar as massas dos carros usados na Actividade A7 usando duas barras metálicas, de massa igual à dos carros. Deste modo podemos duplicar ou triplicar a massa de um dos carros relativamente ao outro. Suponha que o carro com massa $2m$ está parado. O outro, de massa m e velocidade inicial $\vec{v} = v_0\hat{i}$, colide com ele e fica parado, após a colisão.

- a) Qual é a velocidade do carro de massa $2m$ após a colisão?
- b) A energia cinética total dos dois carros manteve-se?

7.1.3 Momento linear e impulso

A derivada temporal do momento linear é o valor instantâneo da força externa:

$$\frac{d\vec{p}_{\text{sist}}}{dt} = \vec{F}_{\text{ext}}(t).$$

Podemos também definir uma força média num intervalo de tempo Δt , a partir da taxa média de variação do momento:

$$\frac{\vec{p}_{\text{sist}}(t + \Delta t) - \vec{p}_{\text{sist}}(t)}{\Delta t} = \left(\vec{F}_{\text{ext}}\right)_{\text{med}}$$

e

$$\vec{p}_{\text{sist}}(t + \Delta t) - \vec{p}_{\text{sist}}(t) = \left(\vec{F}_{\text{ext}}\right)_{\text{med}} \times \Delta t.$$

O produto

$$\vec{I} = \left(\vec{F}_{\text{ext}}\right)_{\text{med}} \times \Delta t$$

é o **impulso** da força externa no intervalo de tempo t a $t + \Delta t$. Com esta definição

$$\vec{p}_{\text{sist}}(t + \Delta t) - \vec{p}_{\text{sist}}(t) = \vec{I}$$

Estas definições são úteis no tratamento de forças impulsivas, forças que actuam durante intervalos de tempo muito curtos: por

exemplo, a força de um taco de golfe ou basebol na respectiva bola, ou de uma arma na bala durante o disparo. Em tais situações é muito complicado saber exactamente como varia a força instantânea, $\vec{F}_{\text{ext}}(t)$, com o tempo. A variação de momento permite-nos calcular o impulso. Se tivermos uma ideia do intervalo de tempo da interacção, o valor da força média dá uma ideia da ordem de grandeza das forças envolvidas.

No texto do 11º ano, capítulo 4, secção 4.3.1, tratámos alguns exemplos de forças impulsivas.

7.1.4 Momento linear e velocidade do centro de massa

Suponhamos que a massa total do nosso sistema de partículas está fixa:

$$M = m_1 + m_2 + \dots \quad (7.3)$$

Esta equação e a definição de momento linear,

$$\vec{p}_{\text{sist}} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \dots, \quad (7.4)$$

sugerem uma definição natural de uma velocidade global de um sistema de partículas. Do mesmo modo que para uma partícula o momento \vec{p} é o produto $m\vec{v}$, podemos definir ²

$$\vec{p}_{\text{sist}} = M\vec{v}_{\text{cm}},$$

em que \vec{v}_{cm} , por razões que se vão tornar claras dentro em pouco, é designada por **velocidade do centro de massa**.

Por que é que esta definição é útil?

Se as forças externas sobre o nosso sistema tiverem resultante nula, $\vec{p}_{\text{sist}} = \text{constante}$. Logo:

A velocidade de centro de massa, \vec{v}_{cm} , de um sistema de partículas de massa total M fixa, mantém-se constante se a resultante das forças externas que actuam nesse sistema for nula.

▷ Primeira lei de Newton.

Se repararmos na equação 7.2 e a aplicarmos a um corpo de massa fixa, obtemos:

$$\frac{d\vec{p}_{\text{sist}}}{dt} = M \frac{d\vec{v}_{\text{cm}}}{dt} = \vec{F}_{\text{ext}}.$$

²Como já sabemos o que são \vec{p}_{sist} e M , esta equação é uma **definição** de \vec{v}_{cm} .

▷ Segunda lei de Newton.

A aceleração do centro de massa de um sistema de partículas, multiplicada pela massa total M (fixa) do sistema é igual à resultante das forças externas aplicadas ao sistema.

Estes dois resultados são a primeira e segunda leis de Newton aplicadas a um qualquer sistema de partículas.

A descoberta das leis de Newton não resultou do estudo de movimentos de partículas. Planetas como a Terra ou a Lua, ou estrelas como o Sol, são sistemas de muitas partículas! Qualquer dos carinhos que usámos nas nossas experiências tem da ordem de um número de Avogadro de átomos; todos eles exercem forças uns nos outros. Mas, por mais complexo que seja o sistema de partículas, podemos associar-lhe **uma velocidade**,

$$\vec{v}_{\text{cm}} \equiv \frac{1}{M} (m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + \dots),$$

cujas variações é determinada, exclusivamente, pela resultante das forças externas, de acordo com a segunda lei:

$$M \frac{d\vec{v}_{\text{cm}}}{dt} = \vec{F}_{\text{ext}}.$$

É importante notar que estes resultados não valeriam para um sistema de partículas sem a terceira lei de Newton. Se as forças internas não se cancelassem em virtude do princípio de acção – reacção, o momento linear não se conservaria, e um corpo poderia passar de um estado com $\vec{v}_{\text{cm}} = 0$ para $\vec{v}_{\text{cm}} \neq 0$ sem qualquer força externa. Newton nunca teria descoberto a primeira e segunda leis se a terceira não se verificasse!

\mathcal{ETV}_3 : Consideremos de novo as duas colisões referidas na \mathcal{ETV}_1 da secção 7.1.2. Quais são as velocidades do centro de massa dos dois carros, antes e depois da colisão, nos dois casos?

7.1.5 O centro de massa

Os resultados da secção anterior justificam a utilização do modelo de partícula material no estudo de movimentos. Por mais complexo que seja um corpo, podemos associar-lhe uma velocidade,

■ **Velocidades microscópicas e macroscópicas.** ■

O mais pequeno volume à nossa escala macroscópica, 1 mm^3 , ou mesmo $1 \mu\text{m}^3$ (volume de um cubo de 10^{-3} mm de lado) tem um enorme número de átomos ou moléculas. Aquilo que chamámos uma partícula de fluido é na realidade um sistema com enorme número de partículas. No caso de um líquido ou gás elas têm velocidades desordenadas, com todas as direcções. Todavia, a velocidade de centro de massa de um volume macroscópico de fluido,

$$\vec{v}_{\text{cm}} = \frac{1}{M} (m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + \dots)$$

(soma feita aos átomos desse volume) tem uma variação determinada apenas pelas forças externas exercidas sobre os mesmos. Podemos tratar essa partícula macroscópica de fluido como sendo um corpo de massa igual à soma das massas das partículas que a constituem e de velocidade \vec{v}_{cm} , ao qual aplicamos a segunda lei de Newton.

Assim, aquilo que chamámos a velocidade de um fluido num ponto, $\vec{v}(\vec{r})$, é, de facto, a velocidade do centro de massa de um pequeno volume (pequeno, mas macroscópico, com muitos átomos) à volta desse ponto. Note-se que, se todas as partículas tiverem igual massa, $m = M/N$, em que N é o número de partículas, a velocidade de uma partícula macroscópica de fluido é a média das velocidades dos átomos que a constituem:

$$\vec{v}_{\text{cm}} = \frac{1}{N} (\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \dots)$$

Se esta média de velocidades for nula em qualquer volume macroscópico, não há movimento do ponto de vista macroscópico: o fluido está em repouso, apesar de os seus átomos estarem em movimento permanente.

Caixa 7.1: O que é a velocidade de uma partícula macroscópica de fluido?

\vec{v}_{cm} , cuja variação é determinada pela segunda lei de Newton apenas com forças externas. É como se o corpo fosse substituído por uma partícula, com toda a massa do corpo, M , e velocidade \vec{v}_{cm} ; só nos falta mesmo determinar a posição dessa partícula, que representa o movimento global do corpo. Como

$$\vec{v}_{\text{cm}} = \frac{1}{M} (m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + \dots)$$

parece natural tentar

$$\vec{r}_{\text{cm}} = \frac{1}{M} (m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \dots).$$

Com efeito, não é difícil verificar que

$$\vec{v}_{\text{cm}} = \frac{d\vec{r}_{\text{cm}}}{dt}.$$

O ponto com vector de posição \vec{r}_{cm} , o **centro de massa do sistema**, desloca-se com uma velocidade \vec{v}_{cm} .

A expressão que dá a posição do centro de massa tem forma de uma média sobre as posições de cada partícula, ponderada pela respectiva massa. No caso de N partículas idênticas, $M = Nm$, e \vec{r}_{cm} é a média simples de todas as posições.

$$\vec{r}_{\text{cm}} = \frac{1}{N} (\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \dots)$$

A verdadeira importância do conceito de centro de massa, contudo, resulta do facto de a respectiva velocidade definir o momento linear total do sistema de partículas, que é uma grandeza que **só** pode variar por efeito de forças externas; por mais complexo e elaborado que seja o sistema, o seu momento linear não varia na ausência de influências externas.

7.1.6 Determinação de centros de massa

Moléculas diatómicas

Uma molécula diatómica, homo-nuclear, como O_2 , N_2 ou H_2 , pode ser considerada como um sistema de duas partículas de massas idênticas, os núcleos de cada um dos átomos da molécula. A massa dos electrões é tão pequena comparada com a dos núcleos que pode ser desprezada.

É fácil ver que o centro de massa da molécula é o ponto médio da linha que une os dois núcleos.

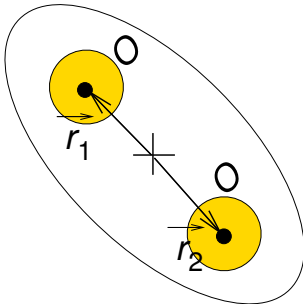


Figura 7.5: Se a origem for o ponto médio entre os dois núcleos $\vec{r}_2 = -\vec{r}_1$.

Por definição, visto que as massas são iguais,

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{2}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2),$$

em que \vec{r}_1 e \vec{r}_2 são os vectores de posição de cada núcleo. Se escolhermos como origem o ponto médio do segmento que une os dois núcleos, tem-se $\vec{r}_2 = -\vec{r}_1$, e $\vec{r}_{cm} = 0$. Ou seja, a origem do sistema de eixos coincide com a posição do centro de massa.

Quando uma molécula deste tipo se move entre duas colisões, num gás, pode rodar e vibrar. A trajectória de cada um dos núcleos pode ser complexa. Mas o centro de massa tem um movimento uniforme e rectilíneo enquanto a molécula não estiver sujeita a forças externas.

\mathcal{ETV}_4 : Recorrendo a uma tabela de dados físicos, estimar a razão entre a massa de todos os electrões e a massa total de uma molécula de oxigénio.

Corpos simétricos

Onde está o centro de massa de uma esfera homogénea? Será necessário fazer explicitamente a soma que define a posição do centro de massa?

Um corpo com uma forma geométrica simples, como uma esfera, um cubo, uma placa rectangular, tem um centro de simetria único. Se escolhermos a origem do sistema de eixos nesse centro, para cada partícula (pequeno volume) com vector de posição \vec{r} , existe um idêntico, com a mesma massa, com vector de posição $-\vec{r}$. Ao fazer a soma sobre todas as partículas do corpo,

$$M\vec{r}_{cm} = m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \dots,$$

os termos cancelam aos pares e o resultado é $\vec{r}_{cm} = 0$: o centro de simetria é a posição do centro de massa.

Se o corpo não for homogéneo, isso deixa de ser verdade. Por exemplo, numa esfera em que metade é de madeira e outra metade de aço, volumes idênticos diametralmente opostos não terão massas iguais.

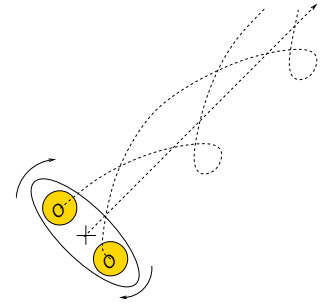


Figura 7.6: As trajectórias dos núcleos podem ser complexas, por causa da rotação e vibração da molécula; a do centro de massa é rectilínea, se não houver forças externas.

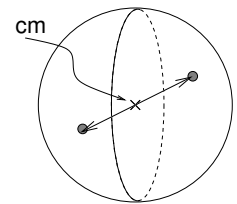


Figura 7.7: O centro de massa da esfera coincide com o seu centro geométrico. Podemos considerá-la constituída por partículas idênticas com vectores de posição simétricos, \vec{r} e $-\vec{r}$, relativamente ao centro da esfera.

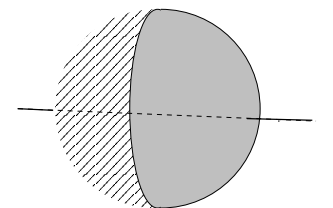


Figura 7.8: O centro de massa desta esfera está sobre o eixo representado tracejado, que passa pelo centro da esfera. Mas a sua posição sobre o eixo depende das massas volúmicas das metades direita e esquerda da esfera.

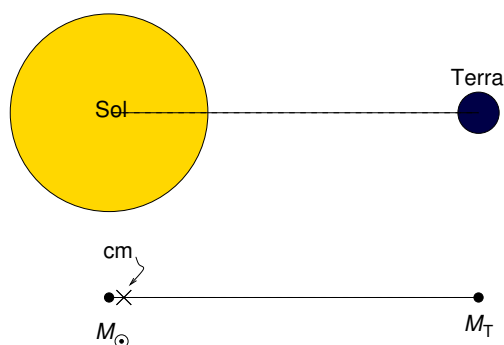


Figura 7.9: Para efeito de cálculo do centro de massa do sistema Terra-Sol cada um destes astros pode ser considerado uma partícula com toda a sua massa concentrada no respectivo centro de massa (o desenho não está à escala).

Corpos compostos

Supondo que a Terra e o Sol são esferas sabemos onde estão os respectivos centros de massa. E o centro de massa do sistema Terra-Sol?

Ao fazer a soma do segundo membro da equação

$$M\vec{r}_{\text{cm}} = m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \dots,$$

a todas as partículas da Terra e do Sol, ($M = M_T + M_\odot$), podemos separar os termos relativos à Terra e ao Sol. A soma dos termos relativos à Terra é por definição $M_T\vec{r}_{\text{cm}}^{(T)}$, em que $\vec{r}_{\text{cm}}^{(T)}$ é o vector de posição do centro de massa da Terra. A soma dos termos relativos ao Sol dá $M_\odot\vec{r}_{\text{cm}}^{(S)}$. Assim,

$$M\vec{r}_{\text{cm}} = M_T\vec{r}_{\text{cm}}^{(T)} + M_\odot\vec{r}_{\text{cm}}^{(S)}$$

Esta expressão é exactamente o que se esperaria se o Sol e a Terra fossem duas partículas situadas nos respectivos centros de massa. Este resultado estende-se para qualquer sistema constituído por vários corpos. Para efeito do cálculo do centro de massa de um conjunto de corpos, cada corpo pode ser considerado como uma partícula situada no respectivo centro de massa.

\mathcal{ETV}_5 : Determinar a distância do centro de massa do sistema Terra-Sol ao centro do Sol. Comparar com o raio do Sol.

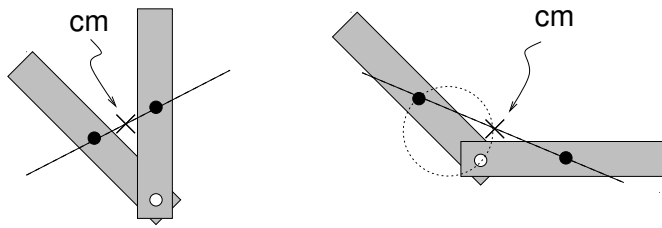


Figura 7.10: A posição do centro de massa deste sistema varia com o ângulo entre as duas barras. Se uma girar sobre a outra o centro de massa tem uma trajectória circular.

Geometria variável

Os aviões com asas retracteis, designam-se por aparelhos de geometria variável. O corpo de qualquer ave, o corpo humano, são também de geometria variável: não são rígidos.

Nessas circunstâncias a posição do centro de massa depende da configuração. Vejamos um exemplo simples: duas barras homogéneas, idênticas, articuladas na extremidade (fig. 7.10). O centro de massa de cada barra coincide com o seu centro geométrico. Para calcular o centro de massa do sistema das duas barras, podemos considerar cada uma como sendo uma partícula, com toda a sua massa concentrada no respectivo centro de massa. Como as massas são iguais estamos numa situação semelhante à da molécula diatómica: o centro de massa é o ponto médio do segmento que une os centros de massa de cada barra. Este ponto desloca-se relativamente às barras se o ângulo entre elas variar.

De modo semelhante, no voo de um saltador como Greg Louganis, a posição do centro de massa não está fixa relativamente a qualquer parte do seu corpo. Mas em qualquer instante podemos, pelo menos em princípio, determinar \vec{r}_{cm} a partir da distribuição de massa do corpo: a trajectória desse ponto é a parábola habitual de uma partícula em queda livre. Nenhuma quantidade de treino pode alterar esse facto.

$\mathcal{E}\mathcal{T}\mathcal{V}_6$: No sistema de duas barras da figura 7.10 uma está fixa e a outra roda em torno do ponto de articulação das duas barras. Este movimento é possível na ausência de forças externas aplicadas a este sistema?

7.1.7 Propulsão de foguetões

Uma ave pode voar, não porque bata as asas, mas porque o ar exerce sobre ela uma força que cancela o seu peso!

Esta afirmação é verdadeira no sentido em que, sem uma força externa além do peso, a ave não poderia evitar que o seu centro de massa caísse com uma aceleração de $9,8 \text{ m s}^{-2}$. Por outro lado, se não “empurrar” o ar com as suas asas, este não pode exercer uma força de reacção sobre a ave.

Contudo, no espaço não há ar. Apesar disso, é possível manobrar uma nave, fazê-la mudar de direcção, corrigir a órbita, aumentar ou diminuir a respectiva velocidade. Como é isto possível sem uma força externa aplicada à nave? Como pode o centro de massa da nave ter uma aceleração diferente da aceleração gravítica local?

A nave consegue isto descartando parte da sua massa. Quando uma nave quer acelerar numa dada direcção, liga foguetões que ejectam gás a alta velocidade na direcção oposta. Estando o conjunto inicialmente parado ($\vec{v}_{\text{cm}} = 0$), se uma massa m de gás for ejectada com uma velocidade \vec{u} , o momento linear do sistema, $\vec{p}_{\text{sist}} = (m\vec{u} + M\vec{v}) = (m + M)\vec{v}_{\text{cm}}$, continuará a ser nulo (M é massa da nave já sem o gás ejectado). Portanto

$$M\vec{v} + m\vec{u} = 0,$$

em que \vec{v} é a velocidade da nave. Assim,

$$\vec{v} = -\frac{m}{M}\vec{u}.$$

Mesmo que a nave ejecte uma fracção pequena da sua massa total, $m \ll M$, a velocidade que adquire pode ser apreciável porque a velocidade de eiecção do gás é muito alta.

ETV₇: uma esfera de massa $m = 30 \text{ g}$ e velocidade $v = 50 \text{ m s}^{-1}$ desintegra-se em voo em dois fragmentos. Um deles, de massa $m = 30 \text{ g}$, tem uma velocidade $v_1 = 20 \text{ m s}^{-1}$ segundo um ângulo de 30° com a direcção original de movimento da esfera.

- a) Qual é o módulo da velocidade do segundo fragmento e que ângulo faz com a direcção da velocidade original da esfera?
- b) Qual foi a variação da energia cinética do sistema?

7.2 Energia e centro de massa

7.2.1 Energia potencial gravítica

Qual é a energia potencial gravítica de um corpo de forma arbitrária à superfície da Terra?

Usando como direcção vertical ascendente a do eixo Oz , estamos habituados a escrever,

$$E_p = mgz.$$

Que valor de z devemos usar se se tratar de um corpo com muitas partículas (como são todos)?

Representando o corpo como um sistema de partículas, parece natural somar as energias potenciais de cada partícula:

$$\begin{aligned} E_p &= m_1gz_1 + m_2gz_2 + \dots \\ &= g(m_1z_1 + m_2z_2 + \dots). \end{aligned}$$

A soma $m_1z_1 + m_2z_2 + \dots$, não é mais que a coordenada z do vector $m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \dots = M\vec{r}_{\text{cm}}$. Ou seja,

$$E_p = Mgz_{\text{cm}}$$

em que M é a massa total do corpo e z_{cm} a coordenada z do centro de massa. Em conclusão, as expressões que usámos anteriormente estão correctas, **se a altura do corpo for entendida como sendo a altura do centro de massa.**

7.2.2 Energia cinética

Será que a energia cinética de um sistema de partículas tem uma expressão análoga à da energia potencial,

$$E_c = \frac{1}{2}Mv_{\text{cm}}^2?$$

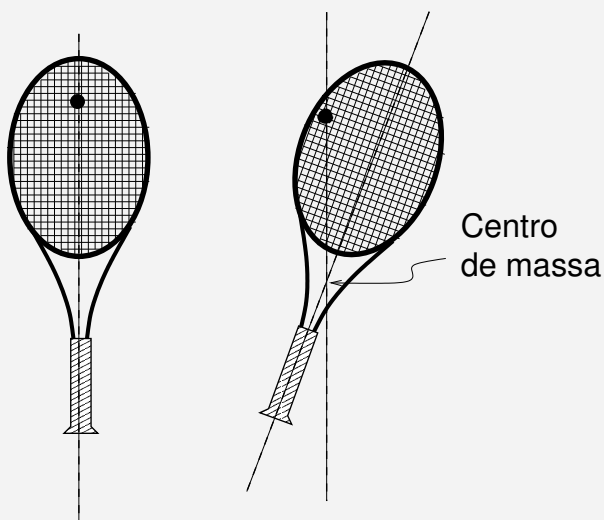
Um minuto de reflexão mostra que este resultado está **errado**. Pensemos por exemplo nas experiências de colisões entre dois carros ao longo de uma calha. Se lançarmos carros da mesma massa m , com velocidades simétricas, \vec{v} e $-\vec{v}$, um contra o outro, o momento linear total é

$$\vec{p}_{\text{sist}} = 2m\vec{v}_{\text{cm}} = m\vec{v} + m(-\vec{v}) = 0.$$

■ **Determinação de centros de massa pelo método da suspensão.** ■

Quando suspendemos um sólido rígido num ponto em torno do qual pode rodar livremente, a posição de equilíbrio do centro de massa fica na vertical do ponto de suspensão. Nessa configuração a altura do centro de massa, z_{cm} , é a menor possível compatível com o ponto de suspensão. Logo a energia potencial gravítica, $E_p = Mgz_{cm}$, é mínima. Se deslocarmos o corpo dessa posição e o largarmos, ele oscilará em torno dessa configuração, até que a energia que fornecemos ao deslocá-lo se dissipar.

Este resultado permite uma determinação muito expedita da posição do centro de massa de formas planares (uma placa de metal ou madeira, por exemplo). Se suspendermos o corpo por dois pontos distintos e traçarmos as verticais que passam pelos dois pontos de suspensão o centro de massa encontra-se no cruzamento das duas linhas.



Método de determinação de centro de massa.

Caixa 7.2: Determinação de centros de massa

Logo, $\vec{v}_{cm} = 0$ e $Mv_{cm}^2/2 = 0$. Contudo, a energia cinética do sistema dos dois carros é

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mv^2 = mv^2.$$

Que relação existe então entre a energia cinética total e

$$\frac{1}{2}Mv_{cm}^2?$$

Podemos sempre decompor a velocidade de cada partícula num termo igual à velocidade do centro de massa e um segundo termo que é a diferença entre a velocidade da partícula e a do centro de massa:

$$\begin{aligned}\vec{v}_1 &= \vec{v}_{cm} + \vec{u}_1 \\ \vec{v}_2 &= \vec{v}_{cm} + \vec{u}_2 \\ &\vdots\end{aligned}\tag{7.5}$$

As velocidades $\vec{u}_1 = \vec{v}_1 - \vec{v}_{cm}$ e $\vec{u}_2 = \vec{v}_2 - \vec{v}_{cm}$, são as velocidades das partículas num referencial em que a origem coincide com a posição do centro de massa (ver Caixa 7.3, na página 187).

É possível mostrar que a soma das energias cinéticas de toda as partículas, $m_1v_1^2/2 + m_2v_2^2/2 + \dots$, tem a forma³:

$$E_c = \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + E'_c$$

em que E'_c , a **energia cinética de movimento relativo ao centro de massa**, tem a expressão:

$$E'_c = \frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2 + \dots$$

O termo dependente da velocidade do centro de massa é designado por **energia cinética de translação**.

A separação destes dois termos não é apenas uma questão de conveniência. Como vimos, se não houver forças externas, a velocidade do centro de massa não varia. Logo a **energia cinética total de translação de um sistema** conserva-se em **qualquer interação**, na ausência de forças externas. Esta lei é aliás uma

³Este assunto será abordado de novo quando discutirmos as relações entre grandezas em referenciais em movimento relativo.

simples consequência da lei de conservação de momento linear já que, como $\vec{p}_{\text{sist}} = M\vec{v}_{\text{cm}}$,

$$\frac{1}{2}Mv_{\text{cm}}^2 = \frac{P^2}{2M}.$$

Mas as leis de Newton não colocam qualquer restrição à energia cinética de movimento relativo, que pode variar como resultado das interacções entre as partículas do sistema.

7.2.3 Energia cinética em colisões

O que é uma colisão?

Um carro choca contra outro; isso é uma colisão. Uma bola de bilhar bate noutra e põe-na em movimento, desviando-se da sua direcção original de movimento: outra colisão. Na actividade 7.2 estudámos também colisões entre carrinhos. Nos túneis do CERN, aceleram-se partículas a velocidades próximas da luz, dirigem-se umas contra as outras em “zonas de interacção” e observam-se os resultados dessas colisões de alta energia.

Reflectindo sobre estas situações, chega-se à conclusão que o que caracteriza estes processos de interacção é a existência de um “antes” e um “depois” cuja descrição é relativamente simples. “Antes” dois ou mais objectos estão separados e movimentam-se sem interagir uns com os outros; “durante” surgem forças entre os objectos em interacção, devido à sua aproximação, e algo que pode ser muito complicado acontece; “depois” os mesmo objectos, ou reagrupamentos dos originais, afastam-se deixando, de novo, de estar em interacção.

Se ignorarmos as forças externas ao sistema de objectos em interacção, a energia total do sistema, quer antes quer depois da colisão, terá a forma,

$$E = E_c + U,$$

em que:

- $E_c = Mv_{\text{cm}}^2/2 + E'_c$ é a energia cinética total;
- U é a soma das energias internas dos objectos em colisões.

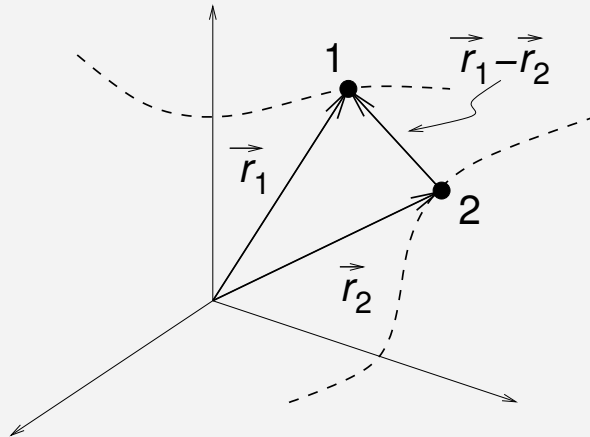
Repare-se que, se quiséssemos considerar os estados do sistema “durante” a colisão, teríamos que incluir a energia potencial da interacção entre eles.

■ Velocidade relativa ■

Consideremos duas partículas com movimentos arbitrários, com vectores de posição $\vec{r}_1(t)$ e $\vec{r}_2(t)$. O vector $\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)$ liga a posição da partícula 2 à da partícula 1; é o vector de posição da partícula 1 para uma origem coincidente com a partícula 2. Por outro lado,

$$\vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \frac{d}{dt}\vec{r}_1(t) - \frac{d}{dt}\vec{r}_2(t) = \frac{d}{dt}(\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t))$$

Isto significa que $\vec{v}_1 - \vec{v}_2$ é a velocidade da partícula 1 **relativamente à partícula 2**. Ou seja a velocidade da partícula 1 num referencial em que a origem coincide com a posição da partícula 2.



O vector $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$ liga a posição da partícula 2 à da partícula 1.

Caixa 7.3: Velocidade relativa de duas partículas.

A conservação de energia de um sistema isolado é uma lei universal, válida para todas as interações. Por isso podemos afirmar com segurança:

$$\left(\frac{1}{2}Mv_{\text{cm}}^2 + E'_c + U\right)_{\text{antes}} = \left(\frac{1}{2}Mv_{\text{cm}}^2 + E'_c + U\right)_{\text{depois}}$$

Por outro lado, já vimos que a energia cinética de translação é constante (não apenas igual antes e depois, mas também durante). Então

$$(E'_c + U)_{\text{antes}} = (E'_c + U)_{\text{depois}}.$$

Coefficiente de restituição

Define-se o **coeficiente de restituição** de uma colisão, e , pela equação:

$$e^2 \equiv \frac{(E'_c)_{\text{depois}}}{(E'_c)_{\text{antes}}} \quad (7.6)$$

em que E'_c é a energia cinética de movimento relativo ao centro de massa. Para uma **colisão elástica** $(E'_c)_{\text{depois}} = (E'_c)_{\text{antes}}$ e $e = 1$. Nestas colisões há conservação da energia cinética macroscópica.

Se houver dissipação de energia, $(E'_c)_{\text{depois}} < (E'_c)_{\text{antes}}$ e $e < 1$: a colisão diz-se inelástica. A máxima dissipação de energia mecânica ocorre se $e = 0$, que corresponde a $(E'_c)_{\text{depois}} = 0$. Isso implica que $\vec{u}_1 = \vec{u}_2 = \dots = 0$, ou seja, todas as partículas se deslocam com a mesma velocidade que o centro de massa: no caso da colisão dos dois carros é o que acontece se estes se deslocarem juntos após a colisão.

Naturalmente, esta diminuição de energia cinética macroscópica é compensada por um aumento da energia interna dos corpos que colidem. Esse aumento pode manifestar-se, por exemplo, por uma deformação de estrutura ou por um aumento de temperatura. Repare-se, contudo, que se $\vec{v}_{\text{cm}} \neq 0$, a energia cinética não pode ser totalmente dissipada. A energia cinética de translação conserva-se, tal como o momento linear total.

Colisões entre duas partículas

É frequente encontrar em livros de texto uma definição de coeficiente de restituição aparentemente diferente da que foi dada acima

na equação 7.6. Numa colisão entre dois corpos de velocidades \vec{v}_1 e \vec{v}_2 define-se:

$$e = \frac{\|\vec{v}_1 - \vec{v}_2\|_{\text{depois}}}{\|\vec{v}_1 - \vec{v}_2\|_{\text{antes}}} \quad (7.7)$$

Note-se que $\vec{v}_1 - \vec{v}_2$ é a velocidade da partícula 1 relativamente à partícula 2. Por isso $\|\vec{v}_1 - \vec{v}_2\|_{\text{antes}}$ é a velocidade de aproximação das duas partículas e $\|\vec{v}_1 - \vec{v}_2\|_{\text{depois}}$ a velocidade de afastamento.

Esta definição não evidencia imediatamente a relação entre o coeficiente de restituição e a dissipação de energia mecânica. Contudo, ela é exactamente equivalente à definição da equação 7.6. Para os curiosos segue-se a demonstração.

Recordemos a definição das velocidades relativas ao centro massa

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= \vec{v}_{\text{cm}} + \vec{u}_1 \\ \vec{v}_2 &= \vec{v}_{\text{cm}} + \vec{u}_2. \\ &\vdots \end{aligned} \quad (7.8)$$

Como

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{v}_{\text{cm}},$$

temos que ter a seguinte relação entre \vec{u}_1 e \vec{u}_2 , as velocidades de cada partícula relativamente ao centro de massa:

$$m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2 = 0.$$

Isto permite-nos exprimir \vec{u}_2 em termos de \vec{u}_1 :

$$\vec{u}_2 = -\frac{m_1}{m_2}\vec{u}_1.$$

Com esta relação, a energia cinética de movimento relativo ao centro de massa pode exprimir-se na forma:

$$E'_c = \frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2 = \frac{1}{2}m_1u_1^2 \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)$$

Como as massas não variam, antes e depois da colisão, obtemos

$$e^2 = \frac{(E'_c)_{\text{depois}}}{(E'_c)_{\text{antes}}} = \frac{(u_1)_{\text{depois}}^2}{(u_1)_{\text{antes}}^2},$$

o que dá

$$e = \frac{(u_1)_{\text{depois}}}{(u_1)_{\text{antes}}}$$

($u_1 = \|\vec{u}_1\|$). Por outro lado, como

$$\vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \vec{u}_1 - \vec{u}_2 = \vec{u}_1 \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right),$$

vem

$$e = \frac{(u_1)_{\text{depois}}}{(u_1)_{\text{antes}}} = \frac{\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) (u_1)_{\text{depois}}}{\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) (u_1)_{\text{antes}}} = \frac{\|\vec{v}_1 - \vec{v}_2\|_{\text{depois}}}{\|\vec{v}_1 - \vec{v}_2\|_{\text{antes}}}.$$

Esta segunda definição permite, em geral, um cálculo mais expedito do coeficiente de restituição.

ETV₈: Na *ETV₂*, da secção 7.1.1, descreve-se uma colisão em que um carro de massa m colide com outro com massa $2m$, inicialmente em repouso. O primeiro carro fica parado após a colisão. Qual é o coeficiente de restituição desta colisão?

Nota: Fazer o cálculo usando as duas definições dadas no texto, eqs. 7.6 e 7.7.

Colisão com estrutura fixa

A colisão de um projectil com uma estrutura fixa, como uma parede, pode ser incluída na discussão anterior do seguinte modo.

Uma estrutura fixa funciona como um corpo de massa M muito superior à massa m do projectil e com velocidade inicial nula. O projectil incide com um velocidade \vec{v}_i e emerge da colisão com um velocidade \vec{v}_f ; a velocidade final é menor ou igual que a inicial, a não ser que haja uma aumento de energia cinética (uma explosão, por exemplo). A variação de quantidade de movimento tem, então, um módulo da ordem de grandeza de mv_i . Por conservação de momento, o momento final da estrutura, Mv_2 , é da ordem de mv_i . Como $M \gg m$, a velocidade da estrutura é muito menor que v_i :

$$v_2 \sim \frac{m}{M}v_i \ll v_i.$$

A velocidade do centro de massa também é muito menor que v_i :

$$v_{\text{cm}} = \frac{m}{M+m}v_i \sim \frac{m}{M}v_i$$

Até aqui nada de surpreendente: não esperamos que uma bola de ténis, lançada contra um parede a 1 m s^{-1} , lhe comunique uma velocidade perceptível. Mas note-se que o momento da estrutura **não é desprezável em relação ao do projectil**: é da mesma ordem de grandeza. Ao contrário, a energia cinética da estrutura será da ordem

$$\frac{1}{2} M v_2^2 \sim \frac{1}{2} M \left(\frac{m}{M} \right)^2 v_i^2 = \left(\frac{m}{M} \right) \frac{1}{2} m v_i^2,$$

ou seja, um factor m/M menor que a energia cinética típica do projectil. O mesmo acontece com a energia cinética de translação:

$$\frac{1}{2} (M + m) v_{\text{cm}}^2 \sim \frac{1}{2} M \left(\frac{m}{M} \right)^2 v_i^2 \sim \left(\frac{m}{M} \right) \frac{1}{2} m v_i^2$$

Assim, a energia cinética de movimento relativo é praticamente igual à energia cinética do projectil e

$$e^2 = \frac{E_f}{E_i} = \frac{m v_f^2 / 2}{m v_i^2 / 2} = \frac{v_f^2}{v_i^2},$$

O coeficiente de restituição é

$$e = \frac{v_f}{v_i}.$$

Voltamos a obter a equivalência das duas definições de e : como a velocidade da estrutura é muito menor que a do projectil a velocidade relativa é praticamente a velocidade do projectil.

7.3 Conclusões

Neste capítulo introduzimos o conceito importante de momento linear de um sistema de partículas:

$$\vec{p}_{\text{sist}} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + \dots \quad (7.9)$$

Em virtude da terceira lei de Newton, esta grandeza é constante se as forças externas tiverem resultante nula. A sua derivada temporal é precisamente a resultante das forças externas:

$$\frac{d\vec{p}_{\text{sist}}}{dt} = \vec{F}_{\text{ext}}. \quad (7.10)$$

A partir desta grandeza definimos uma velocidade global para um sistema de partículas,

$$\vec{v}_{\text{cm}} = \frac{\vec{p}_{\text{sist}}}{M},$$

cuja variação satisfaz a segunda lei de Newton com as forças externas apenas,

$$M \frac{d\vec{v}_{\text{cm}}}{dt} = \vec{F}_{\text{ext}}.$$

Estes resultados justificam o sucesso do modelo de partícula material no estudo de corpos extensos: a velocidade de um corpo é a velocidade do seu centro de massa e para calcular a respectiva aceleração não precisamos de considerar as forças internas. Claro que este processo só nos dá o movimento global do corpo, caracterizado pelo deslocamento do centro de massa.

O movimento de translação de um sistema, caracterizado por \vec{v}_{cm} , tem uma energia cinética de translação associada, $Mv_{\text{cm}}^2/2$. Mas a energia cinética de um sistema de partículas tem também uma componente de movimento relativo ao centro de massa, que, ao contrário da energia de translação, pode variar mesmo na ausência de forças externas.

7.4 Respostas aos $\mathcal{ETV}'s$

7.1. O momento total é

$$\vec{p}_{\text{sist}} = mv_0\hat{i}$$

pois um dos carros tem velocidade nula antes da colisão.

- (a) Se um carro fica parado, o outro, que tem a mesma massa, tem que ter a velocidade $v_0\hat{i}$ para que o momento linear antes e depois da colisão seja o mesmo.
- (b) Se os dois carros se movem com a mesma velocidade, $v\hat{i}$, o momento total é $2mv\hat{i}$. Como o momento se conserva na colisão:

$$2mv\hat{i} = mv_0\hat{i},$$

ou seja

$$v = \frac{v_0}{2}.$$

7.2. O momento total é, novamente,

$$\vec{p}_{\text{sist}} = mv_0\hat{i},$$

em que $v_0\hat{i}$ é a velocidade do primeiro carro antes da colisão.

- (a) Após a colisão o carro com massa $2m$ move-se com velocidade $v\hat{i}$ e o outro está parado. O momento linear é $2mv\hat{i}$. Como o momento antes e depois da colisão é o mesmo,

$$2mv\hat{i} = mv_0\hat{i},$$

ou

$$v = \frac{v_0}{2}.$$

(b) A energia cinética antes da colisão é

$$(E_c)_a = \frac{1}{2}mv_0^2$$

e após

$$(E_c)_d = \frac{1}{2}(2m)v^2 = \frac{1}{2}(2m)\left(\frac{v_0}{2}\right)^2 = \frac{(E_c)_a}{2}.$$

Esta colisão não conserva a energia cinética: metade foi dissipada em formas microscópicas de energia.

7.3. Por um lado, $\vec{p}_{\text{sist}} = mv_0\hat{i}$; como a massa total é $2m$ e $\vec{p}_{\text{sist}} = 2m\vec{v}_{\text{cm}}$ temos, antes ou depois da colisão,

$$\vec{v}_{\text{cm}} = \frac{v_0}{2}\hat{i}.$$

7.4. A massa atômica do oxigénio é $16,0 \text{ u.m.a.}$ Logo a massa de uma molécula de O_2 é $32/(6,02 \times 10^{23}) = 5,3 \times 10^{-23} \text{ g}$. A massa de todos os electrões é $16 \times m_e = 16 \times 0,91 \times 10^{-30} = 14,6 \times 10^{-30} \text{ kg}$. A razão massa dos electrões/massa da molécula é $2,8 \times 10^{-4}$.

7.5. Usando um sistema de eixos com origem no centro do Sol e eixo Ox a passar no centro da Terra temos:

$$\vec{r}_{\text{cm}}^{(S)} = 0; \quad \vec{r}_{\text{cm}}^{(T)} = r_0\hat{i},$$

em que $r_0 = 1,5 \times 10^{11} \text{ m}$ é o raio da órbita da Terra. Assim,

$$(M_{\odot} + M_T)\vec{r}_{\text{cm}} = M_T r_0\hat{i}.$$

A distância do centro de massa do sistema Terra-Sol ao centro do Sol é

$$\|\vec{r}_{\text{cm}}\| = \frac{M_T}{M_{\odot} + M_T} \times r_0 = 4,5 \times 10^5 \text{ m}.$$

O raio do Sol por sua vez, é $6,96 \times 10^8 \text{ m}$, ou seja cerca de 1500 vezes superior a $\|\vec{r}_{\text{cm}}\|$.

7.6. Não. O centro de massa tem um movimento circular centrado num ponto da barra fixa a uma distância da extremidade articulada de cerca de $1/4$ do comprimento da barra. Se a força externa fosse nula, o movimento do centro de massa teria que ser uniforme e rectilíneo (aceleração nula).

7.7. Escolhendo o eixo Ox com a direcção e sentido da velocidade da esfera antes da desintegração (fig. 7.11):

$$\vec{p}_{\text{sist}} = 0,03 \times 50\hat{i} = 1,5\hat{i} \quad (\text{kg m s}^{-1}).$$

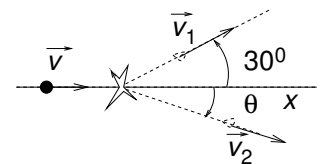


Figura 7.11: Qual é a velocidade do segundo fragmento?

(a) A conservação de momento implica:

$$\begin{aligned} m_1 v_1 \cos(30^\circ) + m_2 v_2 \cos \theta &= 1,5 \\ m_1 v_1 \sin(30^\circ) - m_2 v_2 \sin \theta &= 0. \end{aligned}$$

Assim:

$$\begin{aligned} v_2 \cos \theta &= \frac{1,5 - 0,02 \times 30 \times \sqrt{3}/2}{0,01} = 98 \text{ m s}^{-1} \\ v_2 \sin \theta &= \frac{0,02 \times 30 \times 1/2}{0,01} = 30 \text{ m s}^{-1} \end{aligned}$$

Destas equações tiramos:

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \frac{30}{98} \Rightarrow \theta = 17^\circ, \\ v_2 &= \sqrt{98^2 + 30^2} = 102 \text{ m s}^{-1}. \end{aligned}$$

(b) Conhecidas as velocidades de todos os fragmentos, antes e depois da colisão, é fácil calcular:

$$\begin{aligned} (E_c)_a &= 37,5 \text{ J}, \\ (E_c)_d &= 61 \text{ J}. \end{aligned}$$

A energia cinética aumentou de $(E_c)_d - (E_c)_a = 23,5 \text{ J}$. A energia interna da esfera diminuiu do mesmo valor.

7.8. Antes da colisão as velocidades são:

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= v_0 \hat{\mathbf{i}} \\ \vec{v}_2 &= 0. \end{aligned}$$

Depois da colisão:

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= 0 \\ \vec{v}_2 &= \frac{v_0}{2} \hat{\mathbf{i}}. \end{aligned}$$

A velocidade do centro de massa é

$$\vec{v}_{cm} = \frac{1}{3m} \times m v_0 \hat{\mathbf{i}} = \frac{v_0}{3} \hat{\mathbf{i}}.$$

Antes da colisão,

$$\vec{v}_1 - \vec{v}_2 = v_0 \hat{\mathbf{i}};$$

depois,

$$\vec{v}_1 - \vec{v}_2 = -\frac{v_0}{2} \hat{\mathbf{i}}.$$

Logo

$$e = \frac{\|\vec{v}_1 - \vec{v}_2\|_{\text{depois}}}{\|\vec{v}_1 - \vec{v}_2\|_{\text{antes}}} = \frac{v_0/2}{v_0} = \frac{1}{2}.$$

Para usar a definição em termos de energia cinética, temos que calcular \vec{u}_1 e \vec{u}_2 . Antes da colisão,

$$\begin{aligned}\vec{u}_1 &= \left(v_0 - \frac{v_0}{3}\right) \hat{\mathbf{i}} = \frac{2v_0}{3} \hat{\mathbf{i}} \\ \vec{u}_2 &= \left(0 - \frac{v_0}{3}\right) \hat{\mathbf{i}} = -\frac{v_0}{3} \hat{\mathbf{i}};\end{aligned}$$

depois

$$\begin{aligned}\vec{u}_1 &= \left(0 - \frac{v_0}{3}\right) \hat{\mathbf{i}} = -\frac{v_0}{3} \hat{\mathbf{i}} \\ \vec{u}_2 &= \left(\frac{v_0}{2} - \frac{v_0}{3}\right) \hat{\mathbf{i}} = \frac{v_0}{6} \hat{\mathbf{i}};\end{aligned}$$

A energia cinética,

$$\begin{aligned}(E'_c)_{\text{antes}} &= \frac{1}{2}m \left(\frac{2v_0}{3}\right)^2 + \frac{1}{2}(2m) \left(\frac{v_0}{3}\right)^2 = \frac{mv_0^2}{3} \\ (E'_c)_{\text{depois}} &= \frac{1}{2}m \left(\frac{v_0}{3}\right)^2 + \frac{1}{2}(2m) \left(\frac{v_0}{6}\right)^2 = \frac{mv_0^2}{12}.\end{aligned}$$

O coeficiente de restituição é dado por

$$e^2 = \frac{1}{4}$$

e obtemos o mesmo resultado, $e = 0,5$.

7.5 Atividades questões e problemas

7.5.1 Atividades

7.1. Método de suspensão para determinação de centros de massa.

Usando o método indicado na caixa 7.2 da página 184 determinar a posição do centro de massa de uma raqueta de ténis.

7.2. Colisões entre carros de massas variadas em calha linear.

Ver ficha de Actividade A44.

7.5.2 Questões

7.1. Ao disparar uma arma, o atirador sente um “coice” (recuo) da arma. Porquê?

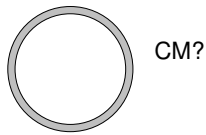


Figura 7.12: Onde está o centro de massa do anel?

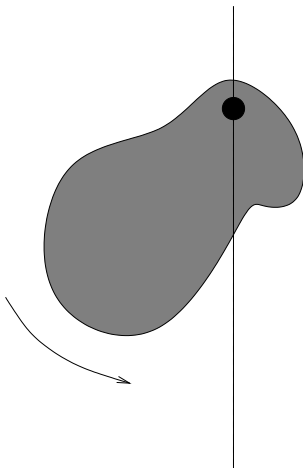


Figura 7.13: Só há um ponto de fixação para o qual a cartolina não oscila.

7.2. Dois astronautas estão juntos, parados no espaço, a dez metros de distância da respectiva nave. Se um dos astronautas puder chegar à nave, pode salvar o outro recorrendo aos foguetes da nave. Contudo, os astronautas não dispõem de qualquer modo de propulsão, pelo que não podem mudar a posição do respectivo centro de massa em relação à nave. Como se podem salvar?

7.3. Para ganhar um prémio numa feira, um rapaz tem que derubar um tijolo, atirando-lhe uma bola. Dispõe de bolas de ténis e de plasticina com massas iguais. O rapaz sabe que a bola de plasticina provavelmente ficará colada ao tijolo e que a de ténis fará ricochete. Qual das bolas deve escolher? Justificar.

7.4. Onde está o centro de massa de um anel homogêneo?

7.5. Suponhamos que recortamos uma forma arbitrária de cartolina e que a fixamos com um pionés a um quadro de corticite. Se o ponto de fixação estiver um pouco solto a cartolina poderá rodar em torno do pionés. Em geral terá uma configuração de equilíbrio única e, se rodada dessa posição, oscilará. Só há um ponto de fixação para o qual isso não acontece.

- (a) Que ponto é esse?
- (b) Por que é que a cartolina não oscila, se estiver fixa nesse ponto?
- (c) Como pode ser determinado esse ponto?

7.6. Quais das seguintes grandezas são conservadas numa colisão (mesmo valor antes e depois da interacção):

- (a) momento linear de cada partícula;
- (b) momento linear total;
- (c) energia total;
- (d) energia cinética de translação;
- (e) energia cinética de movimento relativo ao centro de massa.

7.7. Quais das seguintes grandezas são conservadas numa colisão **elástica**:

- (a) momento linear de cada partícula;

- (b) momento linear total;
- (c) energia total;
- (d) energia cinética de translação;
- (e) energia cinética de movimento relativo ao centro de massa.

7.8. Quais das seguintes grandezas são constantes também durante o processo de interacção de uma colisão **elástica**:

- (a) momento linear de cada partícula;
- (b) momento linear total;
- (c) energia total;
- (d) energia cinética de translação;
- (e) energia cinética de movimento relativo ao centro de massa.

7.9. As colisões entre automóveis são praticamente perfeitamente inelásticas. A energia cinética de movimento relativo é totalmente transformada em energia de deformação das estruturas dos automóveis e dos seus ocupantes. Considerem-se as duas seguintes situações:

- (i) Um carro com velocidade de 100 km h^{-1} colide com um carro idêntico, inicialmente parado.
 - (ii) Os dois carros movem-se, cada um em direcção ao outro, com velocidades de 50 km h^{-1} .
- (a) Em qual das situações é maior a energia cinética do sistema dos dois carros?
 - (b) Qual das colisões causa mais danos nos dois veículos? Ou são equivalentes a esse respeito?

7.10. Quais são as unidades do coeficiente de restituição?

7.11. A figura 7.14 é um esboço de uma colisão entre dois automóveis. A Polícia conseguiu estabelecer os seguintes factos:

- (a) O carro vindo de *A* viajava a 50 km h^{-1} . A sua massa era de 1400 kg .
- (b) O carro vindo de *B* tinha uma massa de 1000 kg .
- (c) O ângulo θ da direcção comum dos dois carros após a colisão com a direcção inicial do carro vindo de *B* é inferior a 45° .

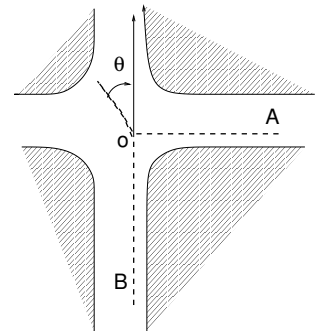


Figura 7.14: Esboço policial de uma colisão entre dois automóveis.

O condutor do carro vindo de B afirma que não viajava a mais de 60 km h^{-1} . A polícia afirma o contrário. Pode prová-lo?

7.5.3 Problemas

7.1. A molécula de Fluoreto de Hidrogénio, HF , tem um comprimento de ligação (distância entre os dois núcleos) de $d = 0,917 \text{ \AA}$.

- Determine a posição do centro de massa relativamente aos dois núcleos.
- Se a molécula contiver um dos isótopos do hidrogénio, deutério ou trítio, em que o núcleo do hidrogénio tem um ou dois neutrões, além do protão, a posição do centro de massa da molécula varia?

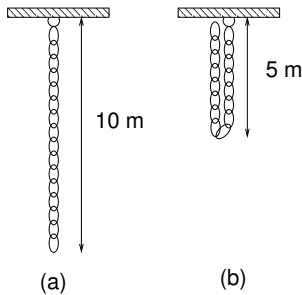


Figura 7.15: Qual é a variação de energia potencial gravítica da corrente?

7.2. A corrente da figura 7.15 tem uma massa total de 10 kg . Qual é a variação de energia potencial gravítica entre a configuração (a), corrente estendida e (b), corrente dobrada?

7.3. Uma pessoa de 70 kg cai de uma altura de 1 m .

- Se após o contacto com o solo o seu centro de massa demorar $0,1 \text{ s}$ a parar, qual é o valor da força média exercida pelo solo nos seus pés, desde o início do contacto até à paragem do centro de massa?
- Quanto vale essa força se a pessoa, flectindo as pernas, aumentar o tempo de paragem para $0,5 \text{ s}$?

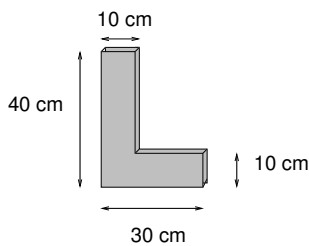


Figura 7.16: Onde está o centro de massa deste "L"?

7.4. O corpo da figura 7.16 é homogêneo. Determinar a posição do respectivo centro de massa.

Nota: Pode ser considerado como constituído por dois retângulos.

7.5. Numa das colisões realizadas na Actividade A7 um dos carros está inicialmente parado e o outro tem uma velocidade inicial de $0,5 \text{ m s}^{-1}$. A massa de cada carro é $m = 0,250 \text{ kg}$. Os carros movem-se em conjunto após a colisão.

- Qual é a velocidade do centro de massa?
- Qual é a energia cinética de translação antes da colisão?
- Qual é a energia cinética de translação após a colisão?

- (d) Qual é a energia de movimento relativo ao centro de massa após a colisão?
- (e) Que percentagem da energia cinética inicial se dissipou na colisão?
- 7.6. Um revólver dispara projecteis de massa $m = 7,4 \text{ g}$ com uma velocidade de saída da arma de 303 m s^{-1} . O comprimento do cano é cerca de 10 cm e a arma tem uma massa de cerca de 600 g .
- (a) Qual é o valor do impulso exercido pela arma sobre o projectil?
- (b) Qual é a velocidade de recuo da arma?
- (c) Se pudéssemos considerar que o movimento do projectil no cano é uniformemente acelerado, qual seria o valor da força exercida pelo projectil na arma?
- 7.7. A FIFA estabelece, nos testes a bolas de futebol, que uma bola, caíndo de uma altura de 2 m sobre uma placa de aço, deve ressaltar a uma altura entre $1,20 \text{ m}$ e $1,65 \text{ m}$.
- (a) Que valores do coeficiente de restituição correspondem a estas alturas de ressaltos?
- (b) Num segundo ressaltos a que altura subiria uma bola que ressaltou a $1,65 \text{ m}$ de altura?

Nota: Ignorar a resistência do ar.

- 7.8. Duas partículas com a mesma massa e velocidades com igual módulo, v , colidem segundo um ângulo de $\pi/2$ (90°). Após a colisão continuam a ter velocidades iguais em módulo, v' , mas o ângulo entre elas é de 2θ (ver fig. 7.17).

- a) Qual é a direcção do vector \vec{p}_{sist} , momento linear total?
- b) Mostrar que:

$$\frac{v'}{v} = \frac{\sqrt{2}}{2 \cos \theta}$$

- c) Mostrar que o coeficiente de restituição é

$$e = \tan \theta.$$

- d) Que interpretações se podem dar ao facto de
- i) $e > 1$, se $\theta > \pi/4$.

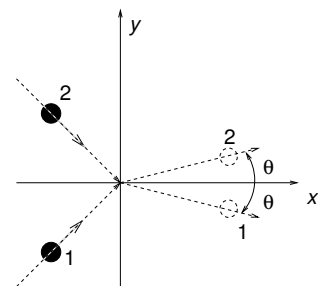


Figura 7.17: Colisão entre duas partículas de igual massa

ii) $e \rightarrow \infty$ se $\theta \rightarrow \pi/2$.

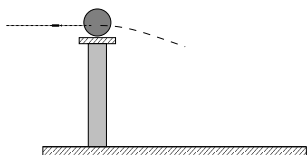


Figura 7.18: Qual é a velocidade da bala?

7.9. Uma esfera de massa 500 g está pousada num suporte de 1 m de altura. É atingida por uma bala de massa $m = 10$ g, com velocidade horizontal, que fica incrustada na esfera. A velocidade da esfera é horizontal, imediatamente após a colisão e ela atinge o solo a 6 metros na horizontal do suporte (ver fig. 7.18).

- Quanto vale o coeficiente de restituição desta colisão?
- Quanto tempo demora a esfera a atingir o solo?
- Qual era a velocidade da bala?

7.10. Um corpo de massa m e velocidade $v_0\hat{i}$ colide com um corpo de massa $2m$, inicialmente parado. A colisão é frontal e as velocidades, após a colisão, são $v_1\hat{i}$ e $v_2\hat{i}$. A colisão é elástica.

- Mostrar que as velocidades após a colisão satisfazem as equações

$$\begin{aligned}v_1 + 2v_2 &= v_0 \\v_1^2 + 2v_2^2 &= v_0^2.\end{aligned}$$

- Resolver estas equações (sugere-se quadrar a primeira) e determinar v_1 e v_2 .
- Se a colisão fosse perfeitamente inelástica, a velocidade da partícula de massa $2m$, após a colisão seria maior ou menor?

7.11. Resolver o problema anterior trocando as massas: supondo que o corpo com velocidade inicial v_0 tem a maior massa, $2m$.

7.5.4 Desafios

7.1. Um esfera cai de uma altura h , com velocidade inicial nula, sobre uma placa de aço. A colisão tem um coeficiente de restituição $e < 1$.

- Mostre que o intervalo de tempo entre a colisão n e $n + 1$, T_n , é dado pela expressão:

$$T_n = 2T_0e^n.$$

em que T_0 é o tempo que a esfera demora a cair a primeira vez.

- (b) Mostre que o tempo total que decorre desde que a esfera cai até à colisão de ordem N , no limite em que $N \rightarrow \infty$, é **finito** e vale

$$T = T_0 \frac{1+e}{1-e}.$$

- (c) Seria possível medir um coeficiente de restituição usando apenas um cronómetro?

Capítulo 8

Gravitação

8.1 A Astronomia como Ciência Física

8.1.1 Astronomia e Astrologia

Se, ao ligar a televisão, encontrássemos um programa de debate entre astrónomos e astrólogos, não teríamos, hoje, grande dificuldade em distinguir uns dos outros.

Para começar, os astrólogos teriam nomes mais invulgares, com “Y” onde devia estar “I” ou “K” em vez de “C”, nomes que ficam melhor nos anúncios de jornais onde divulgam os seus serviços. Os astrónomos teriam, provavelmente, empregos públicos, escapando à necessidade de alterar os seus nomes para subsistir. Mas a linguagem também permitiria distingui-los. Horóscopo, signo, zodíaco, ascendente, conjunção favorável, fazem parte do léxico comum dos astrólogos. Os astrónomos falariam do telescópio Hubble, da radio-astronomia, de raios gama e raios-X, da radiação cósmica de fundo, da expansão do universo, etc.

Mas nem sempre foi assim. Embora se possa argumentar que a Astronomia e a Astrologia são actividades distintas desde a Antiguidade, a primeira dirigida à observação, estudo e compreensão dos astros, a segunda baseada na crença que os eventos astronómicos são úteis na compreensão, organização e interpretação da vida humana na Terra, a verdade é que, até ao século XVII, as mesmas pessoas praticavam ambas as disciplinas. É o caso de dois dos astrónomos mais importantes que vamos referir neste capítulo, Tycho Brahe e Johannes Kepler.

Hoje em dia reconhecemos a Astronomia como uma ciência e as suas contribuições como parte do património de conhecimento ci-

entífico da Humanidade; e a Astrologia como uma actividade baseada em crenças sem qualquer fundamento e nenhum interesse, sequer, como hipótese de investigação.

O problema da demarcação entre o conhecimento científico e outras formas de conhecimento foi debatido sem cessar, e sem consenso, pela filosofia das ciências do século XX. Mostrou-se muito difícil encontrar critérios gerais para distinguir o que é conhecimento científico, do que não é. Uns eram tão estritos que claramente excluía partes da ciência, outros tão latos que incluía como ciência o que poucos podiam admitir que fosse. Mas esta dificuldade de determinação de critérios gerais não significa que não consigamos encontrar num desenvolvimento particular as marcas claras de uma postura e atitude científicas. A história deste capítulo é bem esclarecedora neste aspecto. Ao olhar para algumas etapas do nosso conhecimento actual do sistema solar, descobriremos características típicas do progresso das ideias científicas.

8.1.2 Observação e medição: Tycho Brahe

Em 1563, Tycho Brahe, um jovem estudante de 17 anos na Universidade de Copenhague, escrevia [2]:

Estudei todos os mapas de planetas e estrelas e nenhum concorda com os outros. Há tantas medidas e métodos como há astrónomos e estão todos em desacordo. O que é preciso é um projecto de longo prazo com o objectivo de fazer o mapa dos céus de um único local durante vários anos.

Tycho Brahe

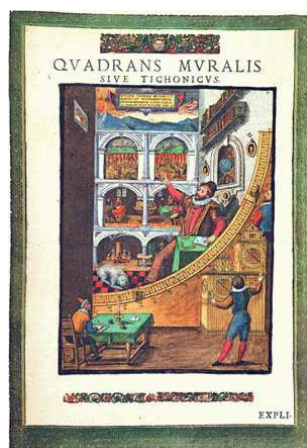


Figura 8.1: Um dos instrumentos de Tycho Brahe [2].

Ao contrário de tantos jovens de 17 anos, Tycho teve oportunidade de realizar o seu projecto, sob o patrocínio do rei Frederico II da Dinamarca e Noruega. Tycho construiu e dirigiu até 1597 dois observatórios, Uraniborg e Stjerneborg na ilha de Hven em Oresund. Não limitou as suas observações a eventos astronómicos determinados, seguiu diariamente as órbitas dos planetas do sistema solar; construiu instrumentos que lhe permitiram medir as suas posições com muito maior precisão que os seus predecessores. Algumas das suas observações tem precisão da ordem de 1 minuto de arco (1/60 do grau). Sabia que as estrelas observadas próximo do horizonte pareciam estar mais altas sobre o horizonte do que

■ Tycho Brahe, 1546–1601 ■



Tycho Brahe (nascido Tyge Ottensen Brahe) era um nobre dinamarquês, astrónomo e astrólogo. Foi educado por um tio, Jorgen Brahe, que o terá raptado a seus pais, sem grandes objecções destes. Em 1559 ingressou na Universidade de Copenhague onde descobriu o seu interesse em astronomia.

A sua primeira grande descoberta foi a de uma nova estrela, na constelação Cassiopeia, em 11 de Novembro de 1572. Sabemos hoje que é uma supernova, SN 1572, resultante de uma violenta explosão de uma estrela pré-existente.

Impressionado pela descoberta de Tycho, o rei Frederico II da Dinamarca e Noruega, financiou a construção de dois observatórios na ilha de Hven onde Tycho realizou, até 1597, extensas observações astronómicas, desenvolvendo instrumentos que lhe permitiram uma muito maior precisão angular de determinação de posições de astros. O telescópio ainda não era conhecido e as observações de Tycho e seus assistentes (um dos quais foi Kepler) eram feitas à vista desarmada.

Os deveres de Tycho como astrónomo imperial incluíam a preparação de mapas e previsões astrológicos para os seus patronos.

Está sepultado em Praga, onde faleceu.

Caixa 8.1: Tycho Brahe, Astrónomo Imperial [2].

na realidade estavam, devido ao desvio da luz por refração na atmosfera, e aprendeu a corrigir este erro.

Tycho Brahe era também um alquimista (Uraniborg, além de observatório, era um laboratório alquímico) e astrólogo. Acreditava numa relação profunda ente o que observava nos céus e o que experimentava na Terra. Nunca acreditou no sistema heliocêntrico de Copérnico, tendo proposto um sistema misto, em que o Sol e a Lua orbitavam a Terra e os restantes planetas o Sol.

Independentemente das suas crenças, Tycho Brahe mediu, como ninguém tinha medido antes, com rigor e com precisão. Os seus resultados foram enorme avanço na astronomia observacional e foram fundamentais para o trabalho de Kepler.

$\mathcal{E}\mathcal{T}\mathcal{V}_1$: A uma distância de 100m, a que comprimento corresponde um minuto de arco?

8.1.3 Organização e sistematização: Kepler

Antes da criação do Universo não havia números excepto a Trindade que era o próprio Deus....Porque a linha e o plano não implicam números. Neles reina o infinito. Consideremos, então, os sólidos. Primeiro temos que eliminar os irregulares porque só estamos preocupados com uma criação ordenada. Restam seis corpos, a esfera e os cinco poliedros regulares. À esfera corresponde o céu. Por outro lado, o mundo dinâmico é representado pelos sólidos de faces planas. Destes existem cinco: mas quando vistos como fronteiras, contudo, estes cinco determinam seis coisas distintas: logo há seis planetas que revolvem à volta do Sol. Esta é a razão porque só há seis planetas...

Kepler in *Mysterium Cosmographicum* [1]

Johannes Kepler, matemático, astrónomo e astrólogo do século XVI e XVII, era movido por uma crença firme da importância das relações matemáticas na organização do Mundo, semelhante à dos filósofos Pitagóricos da Grécia antiga. Seguindo Copérnico,

■ Johannes Kepler, 1571–1630 ■

Nascido no que é hoje o estado alemão de Baden-Württemberg, próximo de Estugarda, Kepler era uma criança de fraca saúde, que revelou muito cedo grande aptidão matemática. Foi educado no sistema Luterano de educação e começou os seus estudos universitários em Tubinga, em teologia. Ensinou matemática na escola Protestante de Graz, antes de se tornar assistente de Tycho Brahe, em 1600, um ano antes da morte deste. Substituiu Tycho Brahe como matemático imperial na corte dos Habsburgos, até à sua morte.

O seu pensamento era dominado por uma crença mística na importância das relações matemáticas como base de toda a natureza. Convertido ao sistema heliocêntrico de Copérnico, que tanto defendia com argumentos teológicos como científicos, procurou descobrir as relações matemáticas associadas aos movimentos dos planetas. No seu primeiro modelo tentou relacionar as distâncias dos planetas aos Sol com os sólidos platónicos regulares: tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro, icosaedro e esfera.

Como assistente de Tycho Brahe, no fim da vida deste, herdou os resultados das suas observações e foi a procura de regularidades matemáticas nestes resultados que o conduziram às três leis de movimento planetário.

Caixa 8.2: Johannes Kepler, Matemático Imperial [1].

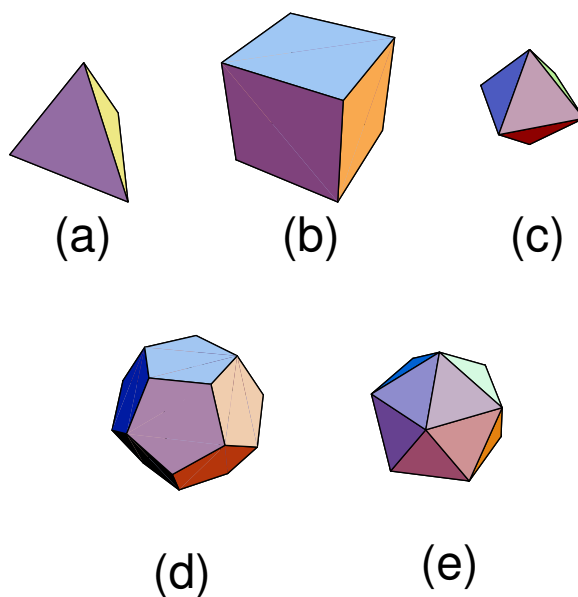


Figura 8.2: Os cinco sólidos platônicos: (a) tetraedro; (b) cubo; (c) octaedro; (d) dodecaedro; (e) icosaedro.

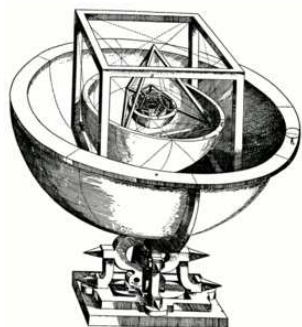


Figura 8.3: Modelo de sistema solar de Kepler, baseado nos sólidos platônicos (in *Mysterium Cosmographicum*, 1596).

acreditava num sistema heliocêntrico e sentiu necessidade de compreender as distâncias dos planetas do sistema solar ao Sol em termos matemáticos.

A perfeição da criação não lhe permitia aceitar desordem ou irregularidades na sua visão do Cosmos. Por isso tentou compreender as órbitas dos planetas em termos das formas perfeitas da esfera e dos cinco sólidos platônicos convexos regulares (lados, faces e ângulos iguais, fig. 8.2). Kepler imaginou um modelo do universo em que um cubo contém uma esfera, na qual está inscrito um tetraedro, que por sua vez contém uma esfera onde está inscrito um dodecaedro, e assim sucessivamente, até esgotar os sólidos platônicos. Cada uma das seis esferas teria embebido um planeta.

Todavia, Kepler foi assistente de Tycho Brahe e conhecia os seus dados astronômicos. Durante quase vinte anos estudou-os pormenorizadamente, tentando descobrir regularidades que evidenciassem as relações matemáticas entre as órbitas dos planetas.

Com desgosto, teve que aceitar que as observações de Tycho Brahe não sustentavam as suas concepções de perfeição e harmonia matemática. O resultado final foi muito diferente daquele que Kepler antecipara. Em particular, descobriu que as órbitas dos planetas não tinham a perfeição do círculo, eram elipses, como que círculos

deformados.

Todavia, Kepler conseguiu, de facto, encontrar as regularidades que estavam por trás das extensas tabelas de observação de Tycho Brahe e resumir em três leis simples anos de observação astronómica.

Os dados de Tycho Brahe não satisfazem ainda uma ânsia de simplificação e sistematização que caracteriza a empresa científica. A motivação de Kepler de procura da harmonia matemática foi fundamental na descoberta das suas leis de movimento planetário. Mas Kepler não encontrou o que queria; graças aos dados de Tycho Brahe, encontrou o que era!

8.1.4 As três leis de Kepler

Kepler descobriu que os dados de Tycho Brahe exprimiam estas três leis simples, quando interpretados num sistema heliocêntrico:

- 1. Lei das órbitas elípticas:** Os planetas movem-se em torno do Sol descrevendo elipses em que o Sol ocupa um foco.
- 2. Lei das áreas:** A linha que une o Sol a um planeta, varre áreas iguais em tempos iguais.
- 3. Lei dos períodos:** O cubo do semi-eixo maior da órbita elíptica de um planeta é proporcional ao quadrado do respectivo período (a mesma constante de proporcionalidade para todos os planetas).

Primeira Lei

A sombra de um círculo é, em geral, uma elipse; a secção de um cone por um plano é uma elipse. Se representarmos os pontos equidistantes de uma origem em coordenadas cartesianas, usando unidades diferentes para os eixos Ox e Oy , a figura obtida é uma elipse. O modo mais fácil de desenhar uma elipse resulta da seguinte definição: a soma das duas distâncias de cada ponto de uma elipse a dois pontos chamados focos é a mesma para todos os pontos da elipse. Os jardineiros usam esta definição para desenhar canteiros elípticos. Amarram as extremidades de uma corda a dois postes fixos em cada um dos focos e, mantendo a corda tensa com uma estaca, deslocam-na em torno dos focos marcando o terreno: o comprimento da corda é a soma das distâncias aos focos.

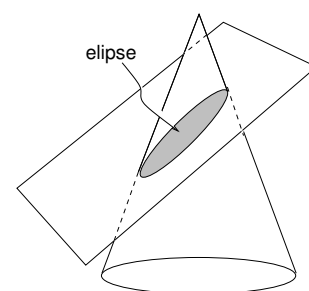


Figura 8.4: Esta secção plana do cone é uma elipse.

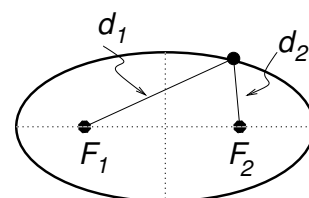


Figura 8.5: A soma das distâncias $d_1 + d_2$ a cada um dos focos é a mesma para todos os pontos de uma elipse.

A primeira lei de Kepler afirma que as órbitas dos planetas em torno do Sol são elípticas (não circulares) e que o Sol ocupa um foco. O facto de Kepler ter conseguido descobrir este resultado é um testemunho da qualidade dos dados de Tycho Brahe. Só para dar um exemplo, a excentricidade da órbita de Marte (ver Caixa 8.3) é $e = 0,094$ o que significa que a razão entre o semi-eixo menor e maior da elipse é

$$\frac{b}{a} = \sqrt{1 - e^2} = 0,996.$$

A diferença relativa $((a - b)/a)$ é apenas de 0,4%! A órbita é quase um círculo, mas os dados Tycho Brahe eram suficientemente precisos para ver que é na realidade uma elipse.

Segunda lei

A segunda lei diz-nos como se movem os planetas ao longo da respectiva órbita. A linha que une o Sol a um planeta na sua órbita varre uma certa área por unidade de tempo. A segunda lei de Kepler afirma que essa área varrida por unidade de tempo se mantém constante em toda a órbita ¹: isto é, em tempos iguais, o planeta varre áreas iguais. Naturalmente, isso implica que quando o planeta está mais próximo do Sol a sua velocidade será maior, uma vez que a linha que o une ao Sol é mais curta (ver figura 8.6).

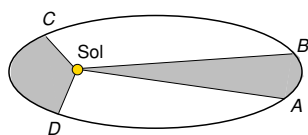


Figura 8.6: Se o tempo que decorre entre a passagem de planeta entre A e B é o mesmo que entre C e D , as áreas sombreadas são iguais.

Terceira Lei

A terceira lei de Kepler relaciona os períodos das órbitas dos diferentes planetas com o respectivo tamanho, medido pelo semi-eixo maior da elipse. Se for a o semi-eixo maior da órbita e T o período da mesma, a terceira lei afirma que

$$a^3 = KT^2,$$

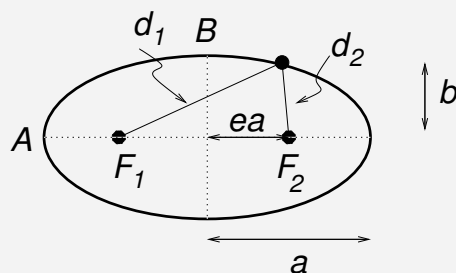
em que K , a constante de Kepler, tem o mesmo valor para todos os planetas do sistema solar.

8.1.5 A teoria e a compreensão: Newton

As leis de Kepler foram um avanço enorme relativamente à compilação de dados de Tycho Brahe. Não são apenas os movimentos

¹A área varrida por unidade de tempo não é a mesma para órbitas distintas.

■ Excentricidade de uma elipse. ■



A distância de um foco ao centro é ea em que e é a excentricidade e a o semi-eixo maior da elipse.

A soma das distâncias de um ponto da elipse a cada um focos, $d_1 + d_2$, é constante. O segmento interior à elipse que passa pelos dois focos é o seu eixo maior. O seu comprimento é $2a$, em que a é o semi-eixo maior da elipse. Se os dois focos coincidirem no centro da elipse, esta degenera num círculo. O afastamento de cada foco do centro da elipse define a sua excentricidade, $0 \leq e \leq 1$, do seguinte modo: a distância do centro a cada foco é ea .

Para o ponto A sobre o semi-eixo maior, $d_1 = a - ea = (1 - e)a$ e $d_2 = (1 + e)a$; isto implica $d_1 + d_2 = 2a$, para qualquer ponto da elipse. Para o ponto B , sobre o semi-eixo menor, $d_1 + d_2 = 2\sqrt{b^2 + (ea)^2} = 2a$, em que b é o semi-eixo menor. Resolvendo em ordem a e , obtém-se:

$$e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}.$$

A razão entre os semi-eixos menor e maior da elipse é:

$$\frac{b}{a} = \sqrt{1 - e^2}.$$

Quando $e \rightarrow 1$, $b \rightarrow 0$ e a elipse degenera numa linha.

Caixa 8.3: Excentricidade e semi-eixos de uma elipse.

passados que ficamos a conhecer, mas também os futuros. Kepler fez a primeira previsão do trânsito de Vénus pelo Sol, observado em 1631 (um ano após a sua morte). Por outro lado, a simplicidade das três leis de Kepler foi decisiva na aceitação do modelo heliocêntrico do sistema solar. Mas foi a Newton que coube dar o passo decisivo no estabelecimento da Astronomia como ciência física.

Na sua obra monumental, os *Principia*, Newton aplicou as suas leis de movimento aos planetas do sistema solar, supondo que estes se moviam sob a acção da atracção gravítica do Sol de acordo com a **lei da Gravitação Universal**:

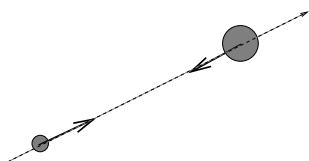


Figura 8.7: Todos os corpos se atraem mutuamente, em virtude da interacção gravítica.

Os corpos atraem-se com forças dirigidas segunda a linha que os une, proporcionais ao produtos das suas massas e inversamente proporcionais ao quadrado da distância entre eles,

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}.$$

Usando os métodos de análise de movimentos que ele próprio desenvolveu, mostrou que as leis de Kepler eram consequências das suas leis de movimento e da lei da Gravitação Universal. Não eram, pois, um acidente, uma característica especial do movimento planetário: os movimentos de uma pedra, de um rio, da água de uma cascata, da Lua, de um planeta em torno do Sol, ou de uma lua de Júpiter, são regidos pelas mesmas leis. A capacidade de a partir de um conjunto de princípios deduzir e prever o comportamento de uma vasta gama de fenómenos é outra das características do desenvolvimento científico. As teorias bem sucedidas, como a Física Newtoniana, explicam muito mais do que as observações que as sugeriram.

Infelizmente, para mostrar que as leis de Kepler decorrem das leis de movimento e da lei da Gravitação Universal é necessário conhecimentos de análise infinitesimal, a ferramenta matemática inventada por Newton e Leibniz, de nível superior ao deste curso. É possível, no entanto, ilustrar alguns aspectos do movimento planetário usando os nossos conhecimentos de Física Newtoniana.

8.1.6 Conclusão antecipada

Encontramos nesta síntese da descoberta de mecânica do sistema solar várias características de uma actividade científica:

- **A observação rigorosa e detalhada:** temos que observar a Natureza de um modo sistemático, detalhado e rigoroso, como fez Tycho Brahe, se quisermos descobrir os seus segredos.
- **A sistematização matemática das observações:** a crença de Kepler na existência de estruturas matemáticas no movimento dos planetas não estava errada. Como dizia Galileu, o livro da Natureza está escrito em linguagem matemática.
- **O primado da experiência na validação:** os cientistas têm ideias e modelos pré-concebidos, mas são a experimentação e observação que determinam quais são os que descrevem a Natureza. Kepler descobriu as suas leis nos dados de Tycho Brahe, não no seu preconceito estético e geométrico do sistema solar.
- **A teoria e unificação:** em ciência explicar é, essencialmente, unificar; reduzir uma multidão de fenómenos, aparentemente distintos, a um reduzido conjunto de princípios dos quais todos decorrem. Foi isto que conseguiu a explicação newtoniana do movimento e da interacção gravítica.

Hoje em dia os astrónomos e físicos não fazem horóscopos, ao contrário de Kepler ou Tycho Brahe. Continuam a fazer observações detalhadas, usando telescópios ópticos, de ondas de rádio, de neutrinos, de raios-X; constroem modelos físicos para as estrelas e galáxias, ou mesmo para o universo inteiro; derivam consequências experimentais desses modelos, que confrontam com os dados observacionais. Ou seja, continuam a melhor tradição de Tycho Brahe, Kepler, ou Newton, com uma percepção muito mais clara do que distingue a sua actividade da Astrologia.

8.2 Astronomia e a Física Newtoniana

Antes de vermos o que as leis de Newton nos podem dizer sobre o movimento planetário há duas simplificações importantes que é preciso mencionar antes: a primeira diz respeito ao campo gravítico de uma esfera, a segunda à massa do sistema solar.

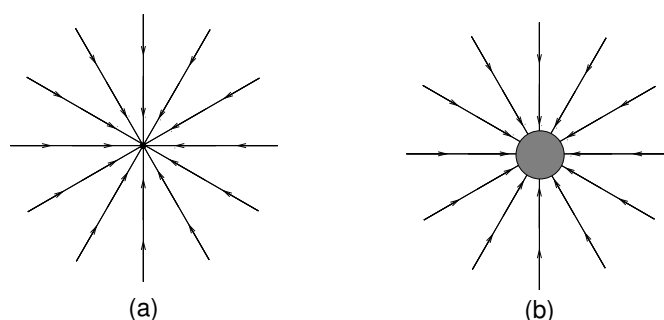


Figura 8.8: O campo gravítico de uma esfera no seu exterior (b), é idêntico ao de uma massa pontual no seu centro (a). As linhas de campo são tangentes à aceleração gravítica em cada ponto do espaço.

8.2.1 Campo gravítico de uma esfera

A força entre duas partículas de massas m_1 e m_2 é atractiva, dirigida segunda a linha que as une, e tem módulo:

$$F = G \frac{m_1 m_2}{R^2}.$$

Se quisermos calcular a força gravítica total sobre uma dada partícula de massa m na posição \vec{r} , somamos as forças exercidas por todas as outras. Como todos os termos da soma são proporcionais a m , a aceleração devida à força gravítica num dado ponto do espaço, \vec{F}/m , é a mesma para qualquer corpo. Ou seja,

$$\vec{F} = m\vec{G}(\vec{r})$$

em que $\vec{G}(\vec{r})$ é a aceleração gravítica de qualquer partícula colocada no ponto \vec{r} . **O campo gravítico é um campo de acelerações:** um sistema de partículas determina em cada ponto do espaço uma aceleração $\vec{G}(\vec{r})$.

Se a fonte do campo for uma partícula pontual de massa m_0 , a expressão do campo de acelerações é

$$\vec{G}(\vec{r}) = -G \frac{m_0}{r^2} \hat{e}_r,$$

em que \hat{e}_r é versor da direcção radial (direcção e sentido do vector de posição e módulo unitário). O vector $-\hat{e}_r$ é dirigido para a posição de m_0 . A força sobre uma partícula de massa m colocada na posição \vec{r} é:

$$\vec{F} = m\vec{G}(\vec{r}) = -G \frac{mm_0}{r^2} \hat{e}_r.$$

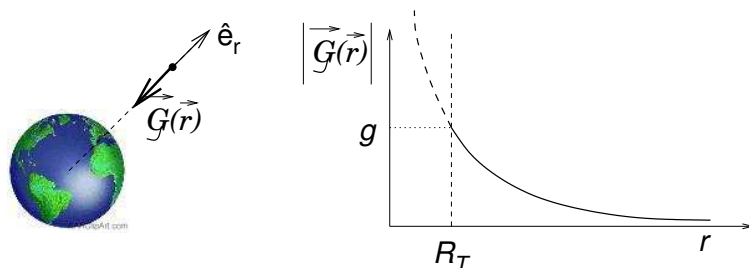


Figura 8.9: A aceleração da gravidade da Terra, no seu exterior, diminui como $\sim 1/r^2$ em que r é distância ao centro da Terra. No interior da Terra a aceleração gravítica é descrita por uma função diferente.

O campo gravítico é um campo de vectores tal como o campo de velocidades que estudámos a propósito de fluidos. Podemos pois usar o mesmo tipo de representações. O equivalente às linhas de corrente, designadas aqui por linhas de campo, são linhas tangentes à aceleração gravítica em cada ponto. No caso presente, são linhas radiais dirigidas para a posição da fonte do campo, a partícula de massa m_0 (ver figura 8.8).

A Terra, o Sol, ou qualquer outro astro, contudo, não são partículas: são sistemas de partículas, segundo o modelo newtoniano discutido no capítulo anterior.

Nos *Principia* Newton calculou o campo gravítico de uma esfera, somando o campos criados por cada uma das suas partículas. O resultado é extremamente simples: no exterior da esfera, o campo é o mesmo que existiria se toda a massa da esfera estivesse no seu centro. Ou seja, uma partícula é atraída pela Terra exactamente como se a massa da Terra estivesse concentrada no respectivo centro.

Assim, o campo gravítico da Terra, para $r > R_T$, é

$$\vec{G}(\vec{r}) = -G \frac{M_T}{r^2} \hat{e}_r$$

em que r é a distância ao centro da Terra e \hat{e}_r é o versor do vector de posição com origem no centro da Terra. Um resultado análogo se aplica para o campo gravítico do Sol.

\mathcal{ETV}_2 : Quando lidamos com movimento próximo da superfície da Terra, bolas de futebol, projecteis, queda de objectos, supomos que a aceleração da gravidade é constante:

$$\vec{G} = -g\hat{\mathbf{k}},$$

em que $g \approx 9,8 \text{ m s}^{-2}$.

a) Obter a seguinte expressão para g :

$$g = \frac{GM_T}{R_T^2}.$$

b) Representar graficamente num diagrama semelhante ao da figura 8.8 o campo de acelerações numa região de dimensões lineares muito menores que o raio da Terra.

8.2.2 A Massa do Sol

A aplicação das Leis de Newton ao sistema solar depende de uma simplificação muito importante: a massa do Sol é 99,85% de toda a massa do sistema solar. Os nove planetas dão conta de apenas 0,135% estando a restante massa distribuída por satélites, cometas, asteróides, etc.

Uma consequência deste facto é que o centro de massa do sistema solar é praticamente coincidente com o centro do Sol. Normalmente, descrevemos o sistema solar colocando a origem no centro do Sol, ou seja usando um referencial em que o centro de massa (centro do Sol) está parado.

A enorme massa do Sol garante também que as força gravítica sobre um corpo do sistema solar é quase na totalidade a força de atracção do Sol, excepto no caso de satélites que estão muito próximos de um dado planeta. Para estudar movimento de satélites próximo da Terra podemos usar uma simplificação análoga.

8.3 As leis de Kepler na Física Newtoniana

8.3.1 Órbitas circulares e a terceira lei de Kepler

Um movimento circular uniforme tem uma aceleração de módulo constante dirigida para o centro da trajectória, a aceleração centrípeta,

$$a_n = \frac{v^2}{R},$$

em que R , o raio de curvatura da trajectória, é, no caso do círculo, a distância ao centro, r .

A atracção gravítica do Sol tem, precisamente, a direcção do centro do Sol e módulo constante. Ou seja, as leis de Newton admitem órbitas circulares, centradas no Sol, desde que:

$$F = G \frac{mM_\odot}{r^2} = ma_n = \frac{mv^2}{r}.$$

em que r é a distância ao Sol. A massa do planeta cancela nos dois lados da equação e obtemos

$$v^2 r = GM_\odot. \quad (8.1)$$

Para relacionar com o período da órbita recordemos que

$$v = \frac{2\pi r}{T} \Rightarrow v^2 = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2},$$

que, substituído na equação anterior, dá:

$$\frac{4\pi^2 r^3}{T^2} = GM_\odot.$$

Resolvendo em ordem a r^3 , obtemos a terceira lei de Kepler na forma:

$$r^3 = \frac{GM_\odot}{4\pi^2} T^2. \quad (8.2)$$

As órbitas circulares satisfazem a terceira lei de Kepler. Um tratamento mais complexo permite generalizar esta relação para órbitas elípticas,

$$a^3 = \frac{GM_\odot}{4\pi^2} T^2,$$

em que a é o semi-eixo maior da elipse: esta é a forma mais geral da terceira Lei de Kepler.

Determinação de massas de Astros

A Física Newtoniana dá-nos o valor da constante de Kepler em termos de G e da massa do Sol:

$$K = \frac{GM_{\odot}}{4\pi^2}. \quad (8.3)$$

Se conseguirmos medir directamente a atracção entre duas massas de valor conhecido, podemos determinar o valor da constante de gravitação Universal, G ; veremos à frente como Henry Cavendish o conseguiu fazer no século XVIII. Por outro lado, a constante de Kepler, $K = a^3/T^2$, pode ser obtida a partir de medições astronómicas de períodos e distâncias. Usando a relação deduzida por Newton, Eq. 8.3, ficamos a conhecer o valor da massa do Sol.

▷ Actividade 8.2

O resultado de Newton não vale apenas para órbitas em torno do Sol. Existe uma terceira lei de Kepler para órbitas em torno de qualquer astro. Assim, para órbitas em torno da Terra:

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM_T}{4\pi^2}. \quad (8.4)$$

Ainda hoje o nosso conhecimento sobre as massas de estrelas, galáxias, etc., provém essencialmente de relações deste tipo: o período e dimensões de uma órbita permitem determinar a massa que cria o campo gravítico em que ela decorre.

*ETV*₃: Os satélites do sistema **GPS** têm órbitas à volta da Terra com períodos de cerca de 12 h.

- (a) A que distância da superfície da Terra estão as suas órbitas?
- (b) A que velocidade se deslocam os satélites?

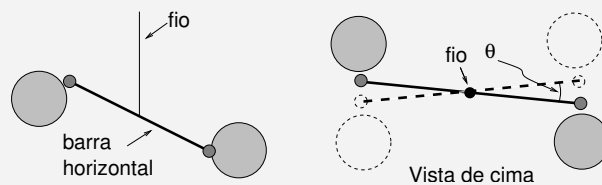
8.3.2 A experiência de Cavendish

A nossa vida é tão dominada pela atracção gravítica da Terra, que não nos apercebemos que a interacção gravítica é extremamente fraca.

■ A experiência de Cavendish ■

Para medir a constante gravitacional, Henry Cavendish usou uma balança de torção inventada e construída por John Michell, que faleceu antes de a poder usar. Era constituída por um fio de cerca de 1 m de comprimento, que suspendia uma barra horizontal de comprimento 1,8 m, com uma esfera de chumbo de 5 cm de diâmetro em cada extremidade. O conjunto estava montado numa caixa selada. Do lado de fora Cavendish podia movimentar duas esferas de chumbo de 30 cm de diâmetro, colocando-as de lados opostos das esferas mais pequenas (ver figura).

A atracção gravítica das duas esferas maiores originava uma torção do fio. Mudando a posição das duas esferas maiores, Cavendish invertia o sentido da torção do fio. A barra horizontal deslocava um nóvio sobre uma escala fixa que Cavendish lia de um outro quarto usando um telescópio. Deste modo, conseguiu determinar o ângulo de torção do fio devido à atracção gravítica entre as esferas de chumbo. Para um dado fio, este ângulo é proporcional ao produto da força entre cada par de esferas pelo comprimento do braço horizontal. A partir daí era possível calcular a força entre cada par de esferas.



Cavendish mediu o ângulo de que rodava a barra horizontal, ao movimentar as esferas maiores para a posição a tracejado.

Caixa 8.4: A experiência de Cavendish.

Se calcularmos a força gravítica entre duas esferas de massa $m = 100 \text{ kg}$ com centros a 20 cm de distância (para a maior parte das substâncias nem é possível tê-las mais próximas sem se tocarem), obtemos

$$F = 6,67 \times 10^{-11} \frac{100^2}{(0,2)^2} = 1,6 \times 10^{-5} \text{ N!}$$

Se pousarmos um corpo de 2 kg sobre uma mesa, esta exerce uma força de $19,6 \text{ N}$, mais de um milhão de vezes maior que a força gravítica entre as duas esferas.

Contudo, se quisermos conhecer o valor da constante de gravitação universal precisamos de medir a forças entre dois corpos de massas conhecidas. Dificilmente podemos pegar em esferas do tamanho de planetas para termos forças da ordem de um Newton.

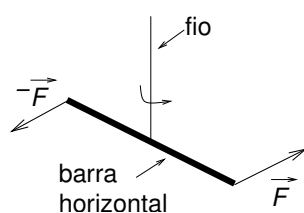


Figura 8.10: Quanto mais afastadas do eixo forem exercidas as forças \vec{F} e $-\vec{F}$, menor é intensidade necessária para torcer o fio de um dado ângulo.

Henry Cavendish, um rico nobre inglês do século XVIII, tão tímido, que deixou quase toda a sua obra por publicar, conseguiu precisamente medir a força entre duas esferas de chumbo de massas de cerca de 1 kg e 170 kg , com diâmetros da ordem de 5 cm e 30 cm : os seus centros não poderiam estar a uma distância inferior a $17,5 \text{ cm}$.

Para conseguir medir forças tão pequenas, Cavendish usou uma balança baseada na torção de um fio. Se quisermos torcer um fio que suporta no centro uma barra horizontal, exercemos forças horizontais de sentidos opostos nos extremos da barra. Quanto maior for a barra, menor serão as forças necessárias para conseguir o mesmo ângulo de torção (princípio da alavanca). Foi com este princípio que Cavendish conseguiu medir forças tão pequenas. Duas esferas de chumbo com diâmetro $d \approx 5 \text{ cm}$ estavam colocadas na extremidade de uma barra horizontal de $1,8 \text{ m}$, suspensa num fio pelo seu ponto médio. Aproximando duas esferas maiores ($d \approx 30 \text{ cm}$), a atracção gravítica destas sobre as esferas mais pequenas foi suficiente para torcer o fio de um ângulo que Cavendish conseguiu medir. Deste modo, foi possível obter o valor de G . Na realidade, Cavendish apresentou os seus resultados como uma medição da massa volúmica da Terra. É habitual dizer-se que Cavendish pesou a Terra; não só a Terra, como também o Sol, ou qualquer astro à volta do qual consigamos medir a dimensão e período de uma órbita.

\mathcal{ETV}_4 : O resultado de Cavendish para a massa volúmica da Terra foi de 5,45 vezes a massa volúmica da água. De facto, Cavendish anunciou o valor de 5,48, devido a um erro de aritmética. Dos seus dados decorre o valor de 5,45.

- a) Assumindo que a Terra é uma esfera de massa volúmica ρ_T uniforme, exprimir g em termos de ρ_T .
- b) Usando os valores $\rho_{\text{água}} = 0,998 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$, $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$, $R_T = 6,38 \times 10^3 \text{ km}$, que valor de G decorre das medições de Cavendish?

8.3.3 Órbitas elípticas

Já sabemos que existem órbitas circulares em torno de um astro. Como podem surgir órbitas elípticas?

Imaginemos uma sonda na órbita circular a da figura 8.11 em torno da Terra; seja v_0 a sua velocidade. A lei da Gravitação Universal implica que a sua aceleração normal em P seja

$$a_n = G \frac{M_T}{r_P^2},$$

em que r_P é a distância de P à Terra. Por outro lado, a componente normal da aceleração de um corpo com velocidade v_0 e trajectória com **raio de curvatura** R_c é (ver Capítulo 2):

$$a_n = \frac{v_0^2}{R_c}$$

Na órbita circular temos, obviamente $R_c = r_p$.

Suponhamos agora que, ao passar em P , a sonda liga propulsores, durante um curto intervalo de tempo, e aumenta a sua velocidade para $v_1 > v_0$, sem alterar a direcção. Que acontece à sua órbita?

A força atractiva da Terra não se alterou, logo a aceleração continua a ter o mesmo valor. Como a velocidade aumentou, $v_1 > v_0$, o raio de curvatura da trajectória tem que aumentar também para que

$$\frac{v_1^2}{R_c} = \frac{v_0^2}{r_p} = G \frac{M_T}{r_p^2}.$$

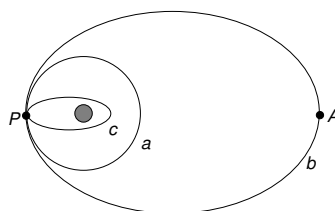


Figura 8.11: Órbitas possíveis em torno da Terra.

▷ **Perigeu e apogeu:** pontos de uma órbita em torno da Terra com distâncias à Terra mínima e máxima, respectivamente. Para órbitas solares os pontos correspondentes são o **periélio** e **afélio**.

O resultado é uma trajetória com menor curvatura, (maior raio de curvatura, $R_c > r_p$); na linguagem do automobilismo, uma “curva menos apertada” em P . A órbita resultante será do tipo da órbita b : uma órbita elíptica. A Terra ocupa, neste caso, o foco mais próximo de P . Este ponto é o perigeu da órbita (ponto de menor distância à Terra). Quanto maior for o aumento de velocidade em P , maior será a distância máxima à Terra que a sonda atinge (ponto A , apogeu da órbita), antes de “voltar para trás” devido à atracção da Terra.

Se a sonda diminuir a sua velocidade em P , a trajetória terá maior “curvatura” que a trajetória circular e será do tipo da órbita c . Nesse caso o Sol ocupa o foco mais distante de P . Se a velocidade em P for suficientemente pequena, pode até acontecer que a órbita resultante intersecte a superfície da Terra. A sonda “cai”!

As órbitas dos cometas em torno do Sol são órbitas elípticas com grande excentricidade, o que faz com que a distância máxima ao Sol possa ser muito superior à distância mínima. O cometa parece visitar a vizinhança do Sol de quando em quando, pois só o conseguimos detectar quando está próximo do Sol: na realidade move-se sempre sob a acção gravítica deste ².

²No portal Faraday <http://faraday.fc.up.pt/Faraday/Recursos/webfisica/halley.html> está disponível uma animação muito interessante da órbita do Halley, da autoria de Osamu Ajiki e Ron Baalke.

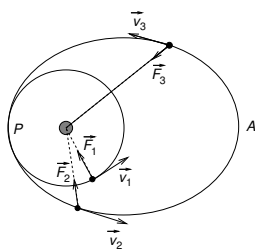


Figura 8.12: Na órbita circular a força é perpendicular à velocidade e esta mantém-se constante. Na órbita elíptica \vec{F} tem uma componente anti-paralela a \vec{v} de P para A e paralela a \vec{v} de A para P .

$\mathcal{E}\mathcal{T}\mathcal{V}_5$: O cometa Halley tem um período orbital em torno do Sol de 76 anos. O seu periélio ocorre a uma distância de 0,59 UA do Sol.

- Qual é o semi-eixo maior da órbita do Halley?
- Qual é a excentricidade da órbita e a que distância ocorre o afélio?

Nota: ver caixa 8.3 na página 211.

8.3.4 Lei das áreas

Repare-se que na órbita elíptica entre P e A da figura 8.12 a força gravítica não é normal à velocidade, como no caso da órbita circular: tem uma componente tangencial oposta à direcção da velocidade. Logo o módulo da velocidade diminui de P para A . No percurso inverso, a componente tangencial da aceleração tem o sentido da velocidade e esta aumenta em módulo. A lei das áreas exprime este facto de um modo quantitativo. A diminuição de velocidade quando a órbita se afasta do astro no seu foco, ou o seu aumento quando se aproxima, mantém constante a área varrida por unidade de tempo. No caso particular de órbitas circulares a lei das áreas implica uma velocidade constante.

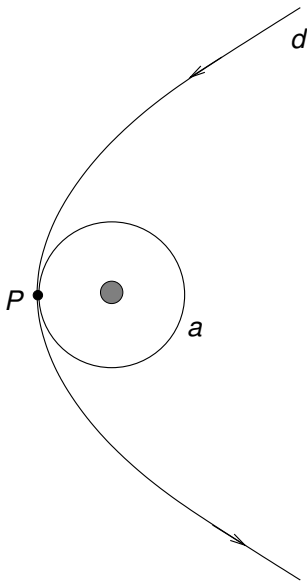


Figura 8.13: d é uma órbita aberta.

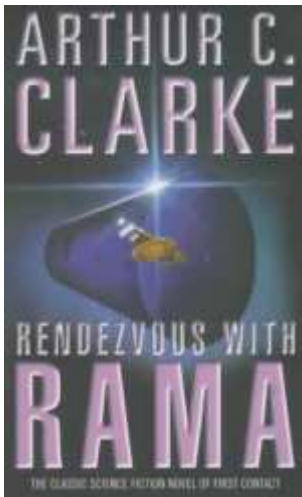


Figura 8.14: Capa da novela, *Rendez-Vous with Rama*, de Arthur C. Clark.

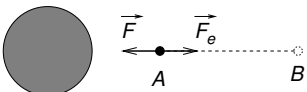


Figura 8.15: Para deslocar o corpo de A para B temos que realizar trabalho externo: a energia potencial do corpo aumenta.

8.3.5 Órbitas abertas

Se o aumento de velocidade em P for suficiente, a sonda pode mesmo escapar à vizinhança da Terra e continuar a afastar-se para sempre. Na figura 8.13 mostra-se uma órbita deste tipo (d). Representa um corpo que, vindo de grande distância, é desviado pela atracção gravítica da Terra e que volta a afastar-se para sempre. As leis de Kepler não contemplam este tipo de órbitas. Contudo, elas são previstas pelas leis de movimento e da Gravitação Universal.

As órbitas fechadas (elípticas) distinguem-se, com grande facilidade das órbitas abertas através da respectiva energia. É essa questão que vamos considerar a seguir. Veremos, em particular, qual teria de ser o aumento de velocidade da sonda para que a partir de P passasse a estar numa órbita aberta.

8.4 Energia no campo gravítico

No início da novela *Rendez-vous with Rama*, de Arthur C. Clark, astrónomos na Terra detectam um enorme objecto (*Rama*, um fantástico cilindro construído por outra civilização) em movimento em direcção ao Sol. Facilmente determinam a sua posição e velocidade com alguns dias de observação. Com base nesses dados, poderiam determinar se a sua órbita, no campo gravítico do Sol, era fechada ou aberta? A nave estava de passagem ou estava a orbitar à volta do Sol?

A resposta a esta pergunta depende de um cálculo simples de energia.

8.4.1 Energia potencial gravítica

Um corpo de massa m na vizinhança de um astro de massa M fica sujeito a uma força gravítica:

$$\vec{F} = m\vec{G}(\vec{r}) = -mG\frac{M}{r^2}\hat{e}_r.$$

Se o quisermos afastar do astro, sem alterar a sua velocidade, temos que exercer uma força externa, \vec{F}_e que cancele a força gravítica; realizamos externamente trabalho sobre o corpo, pois a força externa tem o sentido do deslocamento. A energia potencial gravítica do corpo aumenta, pois, com o seu afastamento.

A variação de energia potencial gravítica quando um corpo passa de uma distância $r_i \rightarrow r_f$ é:

$$\Delta E_P = m \left(\frac{GM}{r_i} - \frac{GM}{r_f} \right).$$

Se levarmos o corpo de r até uma distância infinita, $r_f \rightarrow \infty$, temos

$$E_P(\infty) - E_P(r) = m \frac{GM}{r}.$$

É habitual tomar como estado de referência o de afastamento infinito, isto é, considerar energia potencial nula quando o corpo está infinitamente afastado do astro (força gravítica nula),

$$E_P(\infty) = 0.$$

Sendo assim,

$$E_P(r) = -m \frac{GM}{r}.$$

Vejamos o que significa este resultado.

- A energia potencial é mesma para pontos a igual distância do astro. Outra coisa não seria de esperar já o campo gravítico é idêntico em todas as direcções: não poderíamos ter energia diferentes só por variar a direcção.
- A energia potencial gravítica é negativa pois é sempre menor que a energia no infinito que tomamos como zero, $E_P(\infty) = 0$. De facto, é necessário realizar trabalho externo (aumentar a energia) para afastar dois corpos que se atraem.
- Por esta razão, também, a energia potencial cresce com r : quanto mais afastados os dois corpos, maior a energia. Não nos confundamos com o facto de o valor absoluto de E_p diminuir com o aumento de r ; a variação de E_p é positiva se r aumentar.

Uma representação gráfica da energia potencial em função da distância ao astro tem a forma da figura 8.16. $E_p(r) \rightarrow 0$ quando $r \rightarrow \infty$, sendo cada vez mais negativo quando r diminui. Este diagrama permite-nos compreender a relação entre as características da órbita e a energia.

■ Energia Potencial Gravítica ■

No texto afirma-se que a variação de energia potencial gravítica de um corpo que passa de uma distância r_i para r_f do centro da Terra é

$$\Delta E_p = m \left(\frac{GM_T}{r_i} - \frac{GM_T}{r_f} \right).$$

Contudo, no 10º ano usámos a expressão

$$\Delta E_p = mg\Delta h.$$

Que relação existe entre estas expressões?

Se escrevermos

$$\Delta E_p = mGM_T \left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_f} \right),$$

e reduzirmos ao mesmo denominador as duas fracções,

$$\Delta E_p = mGM_T \left(\frac{r_f - r_i}{r_i r_f} \right) = m \frac{GM_T}{r_i r_f} (r_f - r_i).$$

O termo entre parêntesis é a variação de altura $\Delta h = r_f - r_i$. Se $\Delta h \ll r_i$,

$$r_i r_f = r_i (r_i + \Delta h) \approx r_i^2$$

e obtemos uma expressão semelhante à usada no 10º ano,

$$\Delta E_p = mg\Delta h,$$

com

$$g = \frac{GM_T}{r_i^2}.$$

Em resumo, a expressão usada no 10º ano é uma aproximação válida quando a variação de altura é muito menor que a distância ao centro da Terra e a aceleração da gravidade pode ser considerada constante.

Caixa 8.5: Energia potencial no campo gravítico da Terra.

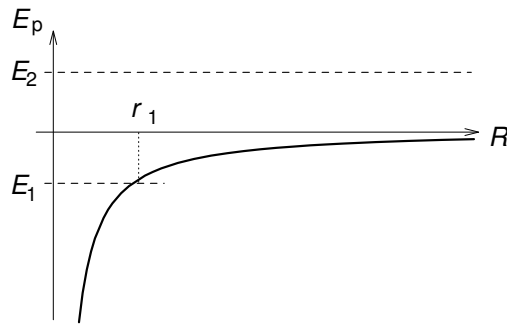


Figura 8.16: Energia potencial gravítica de um corpo em função da distância ao centro do astro que cria o campo gravítico. Se a energia do corpo for E_1 , a sua distância ao astro é sempre inferior a r_1 : a energia total não pode ser inferior a E_p pois a energia cinética é positiva.

Órbitas ligadas e não ligadas

A energia total do corpo é

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + E_p(r) = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{mM}{r}$$

e não varia na órbita. Por isso podemos marcar no diagrama a energia total como uma linha horizontal (a tracejado).

Suponhamos que a energia é $E_1 < 0$. Existe, então, uma distância r_1 para a qual $E_1 = E_p$; para $r < r_1$ temos $E_1 > E_p$ e, portanto, uma energia cinética

$$E_c = E_1 - E_p(r).$$

Mas, se $r > r_1$, obtemos $E_1 < E_p$: isto não é possível, porque a energia cinética é sempre positiva. Podemos desde já concluir que uma órbita de energia E_1 nunca poderá ultrapassar a distância r_1 . À distância r_1 a velocidade seria nula. Uma órbita elíptica de energia E_1 nem sequer pode atingir a distância r_1 pois tem sempre $v \neq 0$.

Por outro lado para uma energia positiva, $E_2 > 0$, temos sempre uma energia cinética positiva qualquer que seja a distância r : as órbitas abertas têm energia superior a $E_p(\infty) = 0$.

As órbitas fechadas dizem-se **ligadas**, pois o corpo em órbita não ultrapassa uma dada distância do astro que orbita. Para o passar para um estado **não ligado** (órbita aberta) temos que aumentar a sua energia pelo menos até $E = 0$.

Voltando à questão da órbita de *Rama*, os astrónomos teriam apenas que calcular o segundo membro da equação

$$\frac{E}{m_{\text{rama}}} = \frac{1}{2}v^2 - \frac{GM_{\odot}}{r}$$

para o que precisavam apenas de saber a velocidade, v , e distância ao Sol, r , de *Rama*: se esta grandeza fosse positiva, a órbita seria aberta e *Rama* voltaria para o espaço interestelar; se fosse negativa, *Rama* estaria numa órbita fechada em torno do Sol³. Não daremos a resposta: diremos apenas que esta é uma questão importante na novela, uma das melhores obras de sempre de ficção científica.

Repare-se que a resposta a esta questão não requer o conhecimento da massa de *Rama*. Como a energia potencial gravítica é proporcional à massa do corpo,

$$E_p(r) = mU_p(r)$$

o potencial gravítico, $U_p(r)$, a energia potencial por unidade de massa, só depende do corpo que cria o campo gravítico.

As questões relativas a órbitas à volta de um astro de massa M só exigem o cálculo da energia por unidade de massa

$$\frac{E}{m} = \frac{1}{2}v^2 + U_p(r).$$

Se ela for positiva a órbita é aberta; se for negativa a órbita é fechada e periódica.

\mathcal{ETV}_6 : Podemos lançar um projectil que nunca mais volte à Terra, que continue a afastar-se para sempre? Que velocidade precisa de ter?

8.5 Conclusões

Neste capítulo explorámos uma parte muito pequena das consequências da Lei da Gravitação Universal. Não falámos de marés,

³Supondo, é claro, que a órbita de *Rama* não a levaria a um encontro próximo com um planeta.

dos anéis planetários, da formação de galáxias e estrelas por contracção gravitacional. Até a dinâmica da expansão do Universo tem aspectos que se podem compreender usando mecânica newtoniana, embora a Relatividade Geral de Einstein seja essencial para uma compreensão detalhada da estrutura do Universo.

Alguns destes problemas são bastante mais complexos do que os que discutimos neste capítulo. Mas é importante perceber que são as consequências das mesmas leis que o génio de Isaac Newton desvendou para toda a Humanidade.

8.6 Resposta ao $\mathcal{ETV}'s$

- 8.1. \mathcal{ETV}_1 : Num círculo de raio 100 m um minuto de arco é uma distância de

$$\frac{2\pi \times 100}{360 \times 60} = 2,9 \text{ cm.}$$

- 8.2. \mathcal{ETV}_2 : A atracção gravítica que a Terra exerce sobre um corpo de massa m à distância r da Terra é

$$F = G \frac{mM_T}{r^2}$$

e dirigida para o seu centro.

- (a) Para variações de altura de dezenas ou centenas de metros, próximo da superfície da Terra a distância ao centro da Terra é praticamente igual ao seu raio:

$$r \approx R_T = 6,4 \times 10^3 \text{ km.}$$

Então,

$$F = G \frac{mM_T}{R_T^2}$$

e o peso⁴ tem a forma $P = mg$, com g constante dado por

$$g = \frac{F}{m} = G \frac{M_T}{R_T^2}.$$

- (b) As linhas de força de campo gravítico são linhas rectas que passam no centro da Terra. Por isso as direcções verticais em dois pontos distintos da superfície da Terra não são exactamente paralelas. Mas se a distância horizontal for muito menor que a distância ao centro da Terra, o ângulo é tão pequeno que as podemos considerar paralelas (ver figura 8.17).

⁴Este resultado ignora uma correcção devida à rotação da Terra, que examinaremos mais tarde.

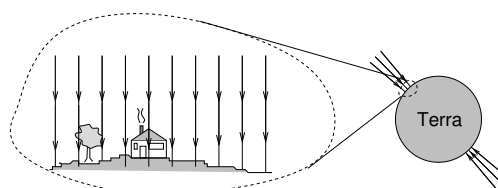


Figura 8.17: O campo gravítico é quase uniforme numa região de dimensões lineares muito menores que o raio da Terra.

8.3. $\mathcal{E}\mathcal{T}\mathcal{V}_3$:

- (a) Uma vez que $T = 12$ h,

$$T^2 = (12 \times 60 \times 60)^2 = 1,9 \times 10^9 \text{ s}^2.$$

Usando a eq. 8.4,

$$r^3 = \frac{GM_T}{4\pi^2} T^2$$

obtemos

$$\begin{aligned} r^3 &= \frac{6,7 \times 10^{-11} \times 6,0 \times 10^{24} \times 1,9 \times 10^9}{4\pi^2} \\ &= 1,9 \times 10^{22} \text{ m}^3. \end{aligned}$$

Extraíndo a raiz cúbica

$$r = 2,7 \times 10^7 \text{ m} = 2,7 \times 10^4 \text{ km}$$

Esta é a distância ao centro da Terra. Subtraindo o raio da Terra, $R_T = 6,4 \times 10^3$ km, obtemos uma altura

$$h = 2,0 \times 10^4 \text{ km},$$

ou seja, cerca de 20 000 quilómetros (mais de três vezes o raio da Terra).

- (b)

$$v = \frac{2\pi R}{T} = \frac{2\pi \times 2,7 \times 10^4}{12} = 14 \times 10^3 \text{ km h}^{-1} = 3,9 \text{ km s}^{-1}.$$

8.4. $\mathcal{E}\mathcal{T}\mathcal{V}_4$: Como $M_T = \rho_T \times 4\pi R_T^3/3$ vem

$$g = G \frac{M_T}{R_T^2} = \frac{4\pi}{3} G \rho_T R_T.$$

- (a) Resolvendo em ordem a G vem

$$G = \frac{3g}{4\pi \rho_T R_T} = 6,75 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}.$$

O valor actualmente aceite é de $6,67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$, apenas 1,2% inferior ao de Cavendish.

8.5. $\mathcal{E}\mathcal{T}\mathcal{V}_5$: A constante de Kepler para órbitas solares vale:

$$K = \frac{GM_{\odot}}{4\pi^2} = \frac{6,7 \times 10^{-11} \times 2,0 \times 30}{4\pi^2} = 3,4 \times 10^{18} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}.$$

(a) A terceira lei de Kepler implica:

$$a = \sqrt[3]{KT^2}.$$

O período é

$$T = 76 \times 365 \times 24 \times 3600 = 2,4 \times 10^9 \text{ s},$$

logo

$$a = 2,7 \times 10^{12} = 18 \text{ UA}.$$

(b) A menor distância é $(1 - e)a = 0,59 \text{ UA}$, o que dá $e = 0,967$.
A maior distância é $(1 + e)a = 35 \text{ UA}$.

8.6. $\mathcal{E}\mathcal{T}\mathcal{V}_6$: A energia total de um projectil lançado com velocidade v de um ponto da superfície da Terra é:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - m\frac{GM_T}{R_T}.$$

Se esta energia for positiva, a órbita será aberta e o corpo afastar-se-á para sempre da Terra. Para isso, a sua velocidade terá que ser tal que

$$\frac{1}{2}v^2 > \frac{GM_T}{R_T}$$

ou

$$v > v_e = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}} = 11,2 \times 10^3 \text{ m s}^{-1}.$$

A velocidade v_e é a **velocidade de escape** da Terra. O projectil não tem que ser lançado na vertical. Desde que não colida com a superfície da Terra pode ser lançado para o espaço em qualquer direcção.

8.7 Actividades, Questões e Problemas

8.7.1 Actividades

8.1. **Visualização da órbita de um planeta relativamente a outro.**

Ver ficha de Actividade A24 (11º ano).

8.2. Constante de Kepler.

Usando uma tabela de dados astronômicos representar graficamente r^3 em função de T^2 para planetas do sistema solar, em que r é a distância média ao Sol e T^2 é o período da órbita. Determinar do gráfico a constante de Kepler e a massa do Sol.

Como as órbitas são quase circulares (excentricidade $e \ll 1$), $r \approx a$ (a , semi-eixo maior da elipse) e a terceira Lei de Kepler é aproximadamente verificada por r e T :

$$\frac{r^3}{T^2} \approx K.$$

8.7.2 Questões

- 8.1. Por que é que um automobilista que entre numa curva com velocidade excessiva se pode despistar?
- 8.2. A órbita de um satélite geo-estacionário (órbita circular de período de 24 horas, o campo gravítico da Terra) tem energia no campo gravítico da Terra negativa, positiva, ou nula?
- 8.3. Um asteróide está em órbita circular em torno do Sol a uma distância de duas UA, duas vezes o raio da órbita da Terra. Qual é o período da sua órbita em anos?
- 8.4. Considerar as órbitas a , b e c da figura 8.11 da página 222. Ordená-las por ordem crescente de energia.
- 8.5. Quais das seguintes afirmações são verdadeiras?
 - (a) O apogeu de uma órbita elíptica é o ponto onde:
 - i. a energia total é maior que em qualquer outro ponto da órbita;
 - ii. a energia potencial gravítica é máxima;
 - iii. a energia potencial gravítica é mínima;
 - iv. a energia cinética é máxima;
 - v. A energia cinética é mínima.
 - (b) O perigeu é o ponto da órbita onde:
 - i. a energia total é menor que em qualquer outro ponto da órbita;
 - ii. a energia potencial gravítica é máxima;
 - iii. a energia potencial gravítica é mínima;

- iv. a energia cinética é máxima;
v. A energia cinética é mínima.
- 8.6. Um sonda orbita o Sol numa órbita circular de raio igual ao da órbita da Terra. A velocidade orbital da sonda é maior, menor ou igual à da Terra? Considere a órbita da Terra circular.
- 8.7. Uma sonda orbita o sol na órbita circular a . Para passar para a órbita c , também circular, liga os propulsores em P para alterar a sua velocidade (mantendo a direcção de sentido), passando para a órbita elíptica de transferência, b . No apogeu da órbita b vai alterar de novo a sua velocidade.
- (a) A velocidade em P aumentou ou diminuiu? Justificar.
(b) A sonda tem que aumentar ou diminuir a sua velocidade em Q ? Justificar.
- 8.8. Quais das seguintes unidades são válidas para o potencial gravítico?
- (a) m s^{-2} .
(b) N m kg^{-1} .
(c) J .
(d) J kg^{-1} .
(e) $\text{m}^2 \text{s}^{-2}$.

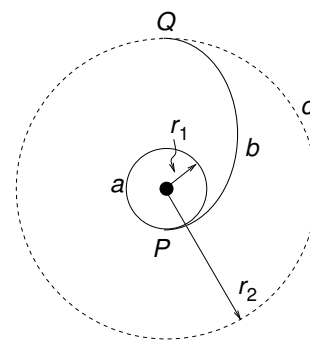


Figura 8.18: Que manobras fazer para passar da órbita circular a para c ?

8.7.3 Problemas

- 8.1. Calcular a aceleração gravítica na superfície de uma asteroide de 10 km de diâmetro com uma massa volúmica semelhante à da Terra.
- 8.2. Qual é o valor da aceleração da gravidade terrestre a uma altitude acima da superfície da Terra igual ao raio da Terra?
- 8.3. Usando uma tabela de dados astronómicos, calcular as acelerações da gravidade nas superfícies da Lua, de Marte e de Júpiter.
- 8.4. Um corpo à superfície da Terra também é atraído pelo Sol.
- (a) Calcular a força exercida pelo Sol sobre um corpo de massa $m = 1 \text{ kg}$ à superfície da Terra e comparar com o respectivo peso (terrestre).

- 8.5. Num planeta como a Lua, sem atmosfera, não se faz sentir a resistência do ar, como na Terra. É possível ter um corpo em órbita circular “rasante” à superfície.
- (a) Calcular a velocidade de um projectil em órbita em torno da Lua, a uma distância do seu centro igual ao raio da Lua.
 - (b) Repetir o cálculo da alínea (a) para uma órbita em torno de um planeta de massa e dimensões da Terra.
 - (c) Calcular a energia gravitacional de um corpo de massa 1 kg, nas órbitas das alíneas anteriores.
- 8.6. Quantos Joule por kg são necessários para acelerar um corpo até à velocidade de escape da Terra?
- 8.7. Qual é altura máxima atingida por um projectil lançado na vertical com metade da velocidade de escape da Terra? (ignorar o efeito da atmosfera).
- 8.8. Os satélites geo-estacionários têm períodos orbitais de cerca de 24 horas.
- (a) A que altura acima da superfície terrestre orbitam a Terra?
 - (b) Qual é a respectiva velocidade orbital?
- 8.9. Calcular a velocidade de escape de um corpo à superfície da Lua.
- 8.10. Um sonda de $m = 800 \text{ kg}$, orbita o Sol num órbita circular de raio igual à da Terra ($1 \text{ UA} = 1,5 \times 10^{11} \text{ m}$).
- (a) Qual é a velocidade orbital da sonda?
 - (b) Quanto deve aumentar a sua velocidade para que a sonda passe para uma órbita aberta?
 - (c) Qual é o aumento de energia cinética da sonda?
- 8.11. Calcular a energia de movimento orbital do planeta Terra (cinética mais potencial gravítica, no campo do Sol).
- 8.12. Calcular a energia total de um corpo de massa m numa órbita circular de raio r em torno de um astro de massa M e mostrar que a energia por unidade de massa é

$$\frac{E}{m} = \frac{1}{2}U_p(r) = -\frac{1}{2}\frac{GM}{r}.$$

- 8.13. O Sol tem um movimento orbital, de órbita aproximadamente circular, em torno do centro da nossa galáxia. A distância ao centro é de cerca da 28 000 anos-luz. A velocidade orbital do Sol é cerca de 280 km s^{-1} .
- (a) Qual será o valor da massa da galáxia, interior à órbita do Sol, responsável pela atracção que mantém este movimento orbital do Sol?
 - (b) A quantas estrelas de massa média igual à do Sol corresponde essa massa?
- 8.14. Sabe-se que para remover o electrão do átomo de Hidrogénio é necessária uma energia de $13,6 \text{ eV}$. Imaginemos que a força entre o electrão e o protão era de origem gravítica e que a órbita era circular. Esta energia seria a necessária para passar o electrão para uma órbita aberta.
- (a) Qual seria o raio da órbita do electrão? Como se compara com o raio do átomo de hidrogénio?
- 8.15. Os astronautas são sujeitos a acelerações muito elevadas, quer no lançamento das naves quer na reentrada na atmosfera. Nos treinos são colocados numa “centrifugadora”: uma cápsula montada na extremidade de um braço que pode girar a alta velocidade em torno de um eixo na extremidade oposta.
- (a) Se o braço tiver 5 m de comprimento (distância da cápsula ao eixo de rotação), a quantas rotações por minuto terá que rodar para que a aceleração centrípeta dos astronautas na cápsula seja $a_c = 10g$? (g , a aceleração da gravidade).

Bibliografia

- [1] Johannes Kepler - Wikipedia, the free encyclopedia. URL: en.wikipedia.org/wiki/Johannes_Kepler, January 2006.
- [2] Tycho Brahe - Wikipedia, the free encyclopedia. URL: http://en.wikipedia.org/wiki/Tycho_Brahe, January 2006.
- [3] William Harris. How car suspensions work. URL: <http://auto.howstuffworks.com/car-suspension.htm>.
- [4] J. Krim. Resource letter: Fmmls-1: Friction at macroscopic and microscopic length scales. *Am. J. Phys.*, 70(9):890, 2002.